

Scuola di speleologia di Cagliari della CNSS-SSI



Speleo Club di Cagliari

Un noto problema Cartografico

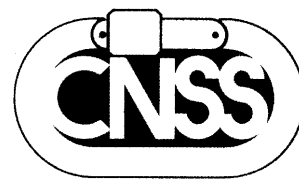
Conversione:
fra le coordinate geografiche ellissoidiche
e le coordinate piane ortogonali

Paolo Salimbeni



**Comitato
Esecutivo
Regionale
Sardegna**

**Commissione
Nazionale
Scuole
di Speleologia**



Edizione 7E202

Testi Tecnici

Prima edizione: 05 / 1998

Ultima edizione: 02 / 2018

L'Autore sarà grato a tutti coloro che gli segnaleranno eventuali od *errori* od *imprecisioni* (sono graditi anche e *consigli* ed *opinioni*).

Paololuigi Salimbeni via P. Cavarò, 73 09131 Cagliari
cellulare.: +39 3493897629
e-mail: p.salimba@gmail.com

Questa ed altre dispense, sempre dello stesso Autore, nel sito di **Paolo Salimbeni** «<http://www.paolosalimbeni.it>»; vedi in: **Dispense**.

Dello stesso Autore, e nel medesimo sito, alcune presentazioni in **PowerPoint**; vedi in: **Presentazioni**.

Copyright © Paolo Salimbeni

Tutti i diritti sono riservati, a norma di legge ed a norma delle convenzioni internazionali; nessuna parte dell'opera può essere riprodotta, tradotta o diffusa, in qualsiasi forma o sistema (per fotocopia, microfilm, supporti magnetici, o qualsiasi altro procedimento), o rielaborata o trasmessa, con l'uso di sistemi elettronici, senza l'autorizzazione scritta dell'autore. . . . **o no ?!**

All rights reserved, no part of this book may be reproduced, who may quote brief passages or reproduce illustrations in a review with appropriate credit; nor any part of this book be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means electronic, photocopying, recording, or other without permission in writing from the Author. . . . **or not ?!**

Premessa

L'esigenza di eseguire, con metodi semplici e rapidi, la conversione dalle *coordinate geografiche ellissoidiche* alle *coordinate piane cartesiane ortogonali*, e viceversa, ha spinto i cartografi ad ideare dei metodi alternativi per ovviare ai lunghi e complessi calcoli altrimenti necessari.

A tal uopo furono pertanto ideate e pubblicate, in diversi stati, delle tavole numeriche, atte a tale scopo, fra le quali possiamo citare quelle costruite o dall'**Army Map Service** americano o dal **Service Géographique de l'Armée** francese o dall'**Oberkommando der Kriegsmarine** tedesco o dall'**Istituto Geografico Militare italiano** (I.G.M.).

Con l'evento delle macchine elettroniche programmabili, le tavole numeriche vennero però lentamente, ma progressivamente, abbandonate a favore dei metodi di risoluzione diretta mediante l'elaborazione d'equazioni espresse in forma compatta.

Dopo aver posto l'accento su alcune caratteristiche relative agli elementi cartografici editi dall'**I.G.M.**, ed aver introdotto, in modo conciso, sia la rappresentazione conforme di Gauss sia le correlazioni esistenti fra le coordinate geografiche ellissoidiche e le coordinate piane cartesiane, l'Autore descrive le varie tavole numeriche, utilizzate dalla cartografia ufficiale italiana, prendendo poi in considerazione le formule compatte, ma riservando esclusiva attenzione a quelle date in **Hirvonen**.

Introduce poi alcuni concetti di base sulle principali caratteristiche degli inquadramenti geodetici proponendo due equazioni, da lui stesso sviluppate, per mezzo delle quali si possono stimare, con algoritmi matematici elementari, le *divergenze*, sia in latitudine sia in longitudine, dei valori assunti dalle coordinate geografiche ellissoidiche nei due differenti sistemi: **nazionale, europeo**.

Passa infine a presentare alcuni suoi programmi, fondati sulle equazioni esaminate in precedenza, idonei alla risoluzione del problema della conversione fra coordinate.

Abstract

The need to make, in a simple and quick way, the conversion from the geographic coordinates into the plane co-ordinates and vice versa drove the cartographers to think about some alternative methods to avoid the long and complex calculation otherwise necessary.

Numerical tables were published in several countries, suitable for the propose, among who we can mention those planned by the America **Army Map Service**, the French **Service Géographique de l'Armée**, the german **Oberkommando der Kriegsmarine**, the **italian Istituto Geografico Militare** (I.G.M.).

With the diffusion of computer, the last ones were slowly put apart in favour of methods of direct resolution through the processing of equations expressed in a compact et way.

After considering some characteristics referring to the cartographic elements published by the **I.G.M.** and after introducing, in a concise way, both the representation, in conformity with Gauss, and the correlation's between the geographic and the cartesian plane co-ordinates, the Author describes several numerical tables, used by the italian official cartography and later he takes into consideration the compact formulae giving a special attention to those given in **Hirvonen**.

Then he introduces a some basic ideas about the main characteristics of the geodetic framing proposing two equations, by himself developed, by means of the who can be estimated, with elementary mathematical algorithm, the *divergence*, both at latitude and at longitude, of the values of the geographic co-ordinates in the two different systems: national and european.

And in the end he presents two programmes, based on the previous equations, suitable for the problem resolution of the conversion among co-ordinates.

Un noto problema Cartografico

Conversione fra le
coordinate geografiche ellissoidiche
e le
coordinate piane cartesiane ortogonali

Conversion between
geographic ellipsoidal co-ordinates
and
piane orthogonal co-ordinates

Nozioni preliminari

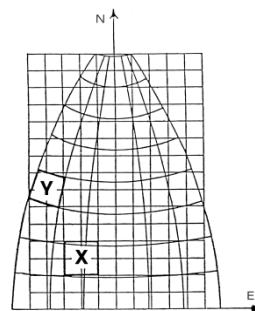
Reticolato geografico, Reticolato chilometrico

Generalmente su ogni elemento cartografico, edito dall'Istituto Geografico Militare Italiano, sono riportati sia l'indicazione della posizione dell'immagine delle trasformate dei meridiani e dei paralleli «**reticolato geografico**» sia l'immagine di un reticolato rettilineo, a maglie quadrate, i cui lati sono paralleli agli assi del sistema cartesiano ortogonale di riferimento «**reticolato chilometrico**» o meno comunemente, e forse più ambiguo, «**reticolato cartografico**» [tav. 01].

Il taglio dei Fogli può essere eseguito indifferentemente secondo uno dei due reticolati i quali, come evidenziato nella [fig. 01], non sono necessariamente paralleli fra loro; nella cartografia ufficiale italiana è stato adottato il taglio del Foglio secondo il **reticolato geografico** e pertanto il **reticolato chilometrico** è generalmente non orientato, obliquo, rispetto alle trasformate dei meridiani e dei paralleli proprie dell'elemento cartografico.

In ambedue i casi la posizione di ogni punto può in ogni caso essere sempre espressa in funzione sia del **reticolato geografico**, definendone le coordinate geografiche ellissoidiche, sia del **reticolato chilometrico**, definendone le coordinate piane cartesiane.

Indipendentemente dal taglio del Foglio e dal sistema adottato, i valori delle coordinate, di ogni punto, sono sempre funzione sia dell'ellissoide di riferimento sia del tipo di proiezione sia dell'inquadramento geodetico in cui è allestito l'elemento cartografico.



[fig. 01]

Proiezione conforme di Gauss

L'espressione generale delle proiezioni conformi «**equazioni di Riemann-Cauchy**», nell'ipotesi che sulla superficie si assuma un sistema isotermo di coordinate « ϕ » e « λ » isometriche, può essere espressa, indicando con « λ » la longitudine contata dal meridiano centrale di riferimento, mediante una relazione del tipo:

$$x \pm iy = F(z) = F(\Phi + i\lambda) \quad [01]$$

ove « F » rappresenta il simbolo di funzione arbitraria della variabile complessa « z »; considerando che: $z = (\phi + i\lambda)$.

La (01) può essere determinata mediante sviluppo in serie di **Taylor**, da cui si ha:

$$x + iy = F(\Phi) + i\lambda F^{(1)}(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2!} F^{(2)}(\Phi) - i \frac{\lambda^3}{3!} F^{(3)}(\Phi) + \frac{\lambda^4}{4!} F^{(4)}(\Phi) + \dots \quad [02]$$

ove $F^n(\Phi)$ indica la derivata di ordine n di $F(\Phi)$.

La variabile « Φ » è sempre reale e pertanto lo sono parimenti sia la funzione $F(\Phi)$ sia le sue derivate:

Particolarizzare la funzione [02] s'intende imporre le *condizioni al contorno* peculiari di una determinata rappresentazione; per quella di **Gauss**, la sola che prenderemo in considerazione in quest'articolo, sono:

1) le trasformate dell'equatore (latitudine $\varphi = 0^\circ$) e del meridiano centrale del Fuso di riferimento (longitudine $\lambda = 0^\circ$) sono rispettivamente rappresentate, sul piano della proiezione, da due rette: l'asse delle ascisse «Y», e l'asse delle ordinate «X»; l'intersezione fra la trasformata del meridiano centrale e la trasformata dell'equatore individuano il punto origine del sistema di riferimento ($\varphi = 0^\circ$; $\lambda = 0^\circ$).

2) in tutti i punti dell'asse «X» il modulo di deformazione lineare rimane uguale ad uno o parimenti sono conservate le lunghezze oggettive lungo la direzione dell'asse «X».

$$\begin{cases} x = F(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2} F^{(2)}(\Phi) + \frac{\lambda^4}{4!} F^{(4)}(\Phi) - \frac{\lambda^6}{6!} F^{(6)}(\Phi) + \dots \\ y = \lambda F^{(1)}(\Phi) - \frac{\lambda^3}{3!} F^{(3)}(\Phi) + \frac{\lambda^5}{5!} F^{(5)}(\Phi) - \dots \end{cases} \quad [03]$$

Assumendo il meridiano origine coincidente con quello di tangenza, del cilindro traverso con l'ellissoide, dalla seconda equazione delle [03], per $\lambda = 0^\circ$, si ha:

$$\begin{cases} x = F(\Phi) \\ y = 0 \end{cases}$$

La prima condizione, al contorno, è pertanto soddisfatta, infatti « $y = 0$ » è appunto l'equazione dell'asse «X».

Dalla prima delle [03] si ricava inoltre che per $\varphi = 0^\circ$ (e di conseguenza per $\Phi = 0$) si ha $x = 0$; l'origine degli assi, del sistema ortogonale di riferimento, giace nell'intersezione dell'immagine dell'equatore con l'immagine del meridiano centrale del fuso.

La seconda condizione impone l'equidistanza lungo l'asse «X» o parimenti che per in ogni suo punto si abbia:

$$m = \frac{dx}{\rho \cdot d\varphi} = 1 \quad \text{e pertanto: } dx = \rho \cdot d\varphi$$

in cui: m = modulo di deformazione lineare - ρ = raggio di curvatura del meridiano considerato, alla latitudine « φ ».

Integrando la funzione $dx = \rho \cdot d\varphi$, da «0» ad un generico valore « φ » della latitudine, e tenendo presente la (03a), per $\lambda = 0^\circ$, si ha:

$$x = F(\Phi) = \int_0^\varphi \rho \cdot d\varphi$$

la quale descrive l'espressione della relazione che consente di definire la forma della funzione $F(\Phi)$ che caratterizza la rappresentazione conforme di **Gauss**:

$$F(\Phi) = \int \rho \cdot d\varphi = a(1 - e^2) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)} = B_\varphi \quad [04]$$

Le trasformate degli altri *meridiani* e degli altri *paralleli* appartengono due famiglie di curve, perpendicolari fra loro, simmetriche rispetto sia al *meridiano centrale* di riferimento sia all'*equatore*; la [tav. 02] mostra l'immagine del *reticolato geografico* nella *rappresentazione conforme di Gauss*.

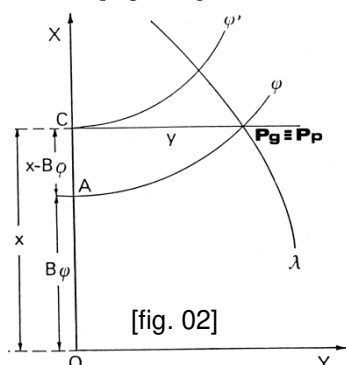
Correlazioni fra coordinate

coordinate: piane cartesiane, geografiche ellissoidiche

La [fig. 02] mostra il piano di Gauss in cui sono rappresentate sia le immagini delle trasformate dei *paralleli* di latitudine « Ψ » e « Ψ' » sia l'immagine della trasformata sia del *meridiano* di longitudine « λ » sia quello di longitudine $\lambda = 0$.

Come si può osservare, la loro intersezione individua il punto $P_g \equiv (\varphi, \lambda)$, nel reticolato geografico, coincidente con il punto $P_p \equiv (x, y)$, sul reticolato chilometrico, misurate rispettivamente sull'asse «X», immagine del meridiano centrale del fuso, e sull'asse «Y», immagine dell'equatore.

Esiste pertanto, fermi restando tutti gli elementi che caratterizzano la rappresentazione conforme di Gauss, una relazione biunivoca che lega le **coordinate piane cartesiane** alle **coordinate geografiche ellissoidiche**; ad ogni punto di coordinate



$P_g \equiv (\varphi, \lambda)$ corrisponde infatti uno ed un solo punto di coordinate $P_p \equiv (x, y)$ coincidente, sul piano della rappresentazione cartografica, col primo.

Si può pervenire pertanto all'enunciazione delle *formule di corrispondenza*, parimenti dette *equazioni della carta*, espresse dai seguenti sviluppi in serie di potenze di « λ »:

$$X = B_\phi + \frac{N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{2} \cdot \sin^2 \varphi \cdot 1'' \lambda^2 + \frac{N \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi}{24} \cdot (5 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \cdot \sin^4 \varphi \cdot 1'' \lambda^4 + \\ + \frac{N \cdot \sin \varphi \cdot \cos^5 \varphi}{720} \cdot (61 - 58 t^2 + t^4 + 270 \eta^2 - 330 \eta^2 t^2) \cdot \sin^6 \varphi \cdot 1'' \lambda^6 + \dots$$

$$Y = N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot 1'' \lambda + \frac{N \cdot \cos^3 \varphi}{6} \cdot (1 - t^2 + \eta^2) \cdot \sin^3 \varphi \cdot 1'' \lambda + \\ + \frac{N \cdot \cos^5 \varphi}{120} \cdot (5 - 18 t^2 + t^4 + 14 \eta^2 - 58 \eta^2 t^2) \cdot \sin^5 \varphi \cdot 1'' \lambda^3 + \dots$$

$$\varphi = \varphi' - \frac{t'}{2N'^2 \cdot \sin 1''} \cdot (1 + \eta^2) \cdot Y^2 + \\ + \frac{t'}{24N'^4 \cdot \sin 1''} \cdot (5 + 3 t'^2 + 6 \eta'^2 - 6 \eta'^2 t'^2 - 3 \eta'^4 - 9 \eta'^4 t'^2) \cdot Y^4 - \\ + \frac{t'}{720N'^6 \cdot \sin 1''} \cdot (61 + 90 t'^2 + 45 t'^4 + 107 \eta'^2 - 162 \eta'^2 t'^4) \cdot Y^6 \dots$$

$$\lambda = \frac{\sin \varphi'}{N' \cdot \sin 1''} \cdot Y - \frac{\sin \varphi'}{6N'^3 \cdot \sin 1''} \cdot (1 + 2 t'^2 + \eta'^2) \cdot Y^3 + \\ + \frac{\sin \varphi'}{120N'^5 \cdot \sin 1''} \cdot (5 + 28 t'^2 + 24 t'^4 + 6 \eta'^2 + 8 \eta'^2 t'^2) \cdot Y^5 \dots$$

essendo: $B_\phi = OA$ = lunghezza dell'arco di meridiano compreso fra l'equatore e il parallelo di latitudine « λ », passante per il punto «P» - λ = differenza di longitudine, espressa in radianti, fra il punto «P» e il meridiano centrale « $\lambda = 0$ » - x = coordinata del punto «P» e lunghezza dell'arco di meridiano compreso fra l'equatore ed il parallelo di latitudine « φ », o parimenti, latitudine del piede della perpendicolare condotta dal punto «P» all'asse «X» della proiezione - $t = \tan \varphi - \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ - N = gran normale = $a / (1 - e'^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ = lunghezza della gran normale alla latitudine « φ » - a = semiasse maggiore dell'ellissoide - $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$ = prima eccentricità - $e'^2 = (a^2 - b^2) = b^2$ = seconda eccentricità o eccentricità aggiunta.

Gli apici indicano che i valori così contrassegnati si riferiscono al piede della perpendicolare, condotta dal punto «P» considerato, all'asse delle «X».

Tavole numeriche

Quando le sempre maggiori esigenze della «*moderna cartografia*» spinsero l'I.G.M. ad abbandonare finalmente la proiezione policentrica di **Sanson-Flamsteet**, l'interesse dei cartografi si rivolse alle rappresentazioni conformi; la convenienza risiedeva nel fatto che così agendo si riusciva non solo a dividere l'intero territorio nazionale in un numero minimo di *zone* ma soprattutto si potevano riferire tutti i punti appartenenti alla stessa *zona* ad un unico sistema d'assi cartesiani.

Il geodeta italiano Prof. **Giovanni Boaga** (1902 – 1961) propose di adottare la **rappresentazione conforme di Gauss**, già adottata in geodesia, di cui egli stesso studiò ed elaborò particolari formule logaritmiche approntando le tabelle, atte a tale scopo (passare dalle coordinate geografiche a quelle chilometriche e viceversa), valide per il nostro territorio nazionale; il consiglio fu accolto ed il sistema, inquadrato nella *rete geodetica nazionale* con orientamento a **M. Mario** (Roma), prese la denominazione italiana di **Gauss-Boaga**.

Allo scopo di contenere le deformazioni e di assicurare, sui valori delle coordinate, la precisione richiesta per i punti geodetici della rete di 1° ordine, si stimò opportuno, in un primo tempo, ripartire il territorio italiano in cinque fusi di 3° d'ampiezza; valutata infatti fino alle quarte potenze di « λ », l'espressione del modulo di deformazione lineare, in funzione delle coordinate geografiche « φ » e « λ », diviene:

$$m = 1 + \frac{\lambda_{\max}^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2} \cdot (1 + \eta^2) + \frac{\lambda_{\max}^4 \cdot \cos^4 \varphi}{24} \cdot (5 - 4 \cdot \tan^2 \varphi) \quad [05]$$

essendo: $\lambda_{\max}$ = semi ampiezza del fuso di riferimento.

la quale parimenti, in funzione delle coordinate piane «x» ed «y», risulta:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2 \cdot \rho \cdot N} + \frac{y^4}{24 \cdot \rho^2 \cdot N^2}$$

essendo: $\rho = a(1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}$.

Trascurando, nella [05], le quarte potenze di «λ» poiché nulla aggiungono alla precisione del risultato, in questo caso il loro contributo è minore di $5 \cdot 10^{-8}$, affatto trascurabile, e rilevando che il valore delle deformazioni massime si verificava più o meno in coincidenza della zona meridionale dell'*isola di Sicilia*, risolvendo per $\lambda_{\max} = 1^\circ 30'$ e per $\varphi = 36^\circ 30'$, si aveva:

$$m = 1 + \frac{(1,5^\circ_{\max} \cdot 0,01745)^2 \cdot \cos^2 36,5^\circ}{2} \cdot 1,004373 = 1,000222$$

ed il valore del *modulo di deformazione lineare* risultava ampiamente nei limiti prefissati.

Le prime tavole numeriche costruite dall'**I.G.M.** (anno 1942), riferite *Ellissoide Internazionale (E.I.)* non contratto, orientato a **M. Mario** (Roma) in rappresentazione **Gauss-Boaga**, applicabili alla nostra cartografia, erano basate su gli sviluppi in serie ed il calcolo esigeva l'uso dei logaritmi; le formule prevedevano soltanto la trasformazione dalle coordinate geografiche alle coordinate piane mentre la trasformazione inversa si otteneva col metodo iterativo della *falsa posizione*.

In tutte le rappresentazioni conformi, il modulo di *deformazione superficiale* è sempre il quadrato del modulo di *deformazione lineare* o, in altri termini possiamo affermare che «il modulo di *deformazione superficiale*, in un generico punto **P**, è espresso da un valore che è la somma dell'*unità* e di un *contributo* il quale è il doppio di quello caratterizzato dalle cifre decimali del modulo di *deformazione lineare* in quel punto».

$$\begin{cases} \log(x - B) = 2 \log \lambda'' + \log \frac{(\text{arc } 1'')^2}{2} \cdot N \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi + \lambda''^2 \cdot C_2 + \lambda''^4 \cdot C_4 \\ \log Y = \log \lambda'' + \log(\text{arc } 1'') \cdot N \cdot \cos \Phi + \lambda''^2 \cdot C_3 + \lambda''^4 \cdot C_5 \end{cases} \quad [06]$$

in cui:

$$C_2 = \frac{\log e}{12} (\text{arc } 1'')^2 \cdot (6 \cos^2 \varphi + 9 e'^2 \cdot \cos^4 \varphi + 4 e'^4 \cdot \cos^6 \varphi - 1)$$

$$C_4 = \frac{\log e}{1440} (\text{arc } 1'')^4 \cdot (300 \cos^4 \varphi - 180 \cos^2 \varphi - 1)$$

$$C_3 = \frac{\log e}{6} (\text{arc } 1'')^2 \cdot (2 \cos^2 \varphi + e'^2 \cdot \cos^4 \varphi - 1)$$

$$C_5 = \frac{\log e}{180} (\text{arc } 1'')^4 \cdot (26 \cos^4 \varphi - 20 \cos^2 \varphi - 1)$$

Come accennato in precedenza il procedimento inverso, la trasformazione dalle coordinate piane alle coordinate geografiche, si eseguiva col metodo delle *successive approssimazioni* sfruttando sia le equazioni [06] sia le medesime *tavole numeriche* atte alla soluzione del procedimento diretto.

Naturalmente è possibile, come ha evidenziato uno studio compiuto dall'Ingegnere **Carlo Trombetti**, pervenire all'enunciazione di formule, basate sempre su gli sviluppi in serie, nelle quali le coordinate geografiche «φ» e «λ» siano espresse direttamente in funzione delle coordinate piane «x» ed «y»:

$$\begin{cases} \log(\varphi_1 - \varphi) = 2 \log y + \log \frac{\tan \varphi_1}{2 \rho_1 \cdot N_1 \cdot \text{arc } 1''} - y^2 \cdot C'_2 + y^4 \cdot C'_4 \\ \log \lambda = \log y + \log \frac{1}{N_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{arc } 1''} - y^2 \cdot C'_3 + y^4 \cdot C'_5 \end{cases} \quad [07]$$

in cui:

$$C'_2 = \frac{\log e}{12 N_1^2} (5 - 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2 - 4 \eta_1^4) ; \quad C'_4 = \frac{\log e}{1440 N_1^4} (119 + 210 t_1^2 + 135 t_1^4)$$

$$C'_3 = \frac{\log e}{8 N_1^2} (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) ; \quad C'_5 = \frac{\log e}{180 N_1^4} (5 + 32 t_1^2 + 26 t_1^4)$$

essendo: φ_1 = latitudine relativa al punto P, posto sul meridiano origine, che dista dall'equatore di un arco di geodetica pari a $B_1 = x$. Fig.3

Successivamente, uniformandosi così alla scelta d'altre nazioni che già avevano adottato la proiezione di Gauss, fu deciso di utilizzare soltanto due fusi di 6° d'ampiezza: fuso Est e fuso Ovest: i meridiani centrali si trovano rispettivamente a 9° ed a 15° da Greenwich, rispettivamente (3° 27' 08,4" Est e 2° 32' 51,6" Ovest da M.Mario).

Dall'espressione della [05], impiegando sempre la formula in forma semplificata, in questo caso il contributo della parte non considerata è minore di $1 \cdot 10^{-6}$, ugualmente trascurabile, e rilevando che il valore delle deformazioni massime si verifica più o meno in coincidenza della zona orientale della penisola **Salentina** (Puglia), risolvendo per $\lambda_{\max} = 3^\circ$ e per $\varphi = 40^\circ$, si sarebbe ottenuto:

$$m = 1 + \frac{(3^\circ_{\max} \cdot 0,01745)^2 \cdot \cos^2 40^\circ}{2} \cdot 1,003972 = 1,000807$$

ed è chiaro che il valore massimo della deformazione lineare sarebbe risultato troppo elevato e pertanto inaccettabile ai fini cartografici.

Per ovviare a tale inconveniente si è pensato, in seguito, di applicare un *coefficiente di riduzione* del 0,4‰, equivalente ad un rapporto di riduzione di $m_r = 0,9996$, per il quale sono stati moltiplicati i valori delle *coordinate piane gaussiane* che compaiono nelle *formule di corrispondenza*.

In questo modo il valore del *modulo di deformazione* lineare massimo si riduce circa alla metà rientrando nei limiti degli errori di graficismo ammessi.

Questo espediente, che equivale in pratica a considerare il cilindro traverso seccante all'ellissoide, produce l'effetto di variare il valore del modulo di deformazione lineare in modo da fargli assumere, sul meridiano centrale, il valore di $m = 0,9996$ e, sui meridiani di bordo del fuso, il valore di $m = 1,0004$; il valore $m = 1$, conservazione delle lunghezze oggettive, si ha ora lungo due meridiani, chiamati **meridiani standard**, posti a circa $\pm 2^\circ$, o parimenti a circa ± 180 km (alla latitudine media italiana di 42°), dal meridiano centrale del Fuso [tav. 03]; le precedenti tavole numeriche vennero di conseguenza abbandonate.

Il semplice programma **DEFLIN_I**, realizzato dall'Autore e scritto in «C», fornisce il valore del *modulo di deformazione lineare* partendo dai valori noti delle *coordinate geografiche* espresse nei due diversi sistemi geodetici.

Per un generico punto «G» espresso o in *coordinate geografiche italiane* o in *coordinate geografiche (ED 50)* si è utilizzata la [05]; per un generico punto «G» espresso o in *coordinate piane cartesiane Gauss-Boaga* o in *coordinate piane UTM* si sarebbe dovuto utilizzare peraltro l'equazione:

$$m = 9996 \cdot (1 + f \cdot q^2 + 0,00003 \cdot q^4)$$

essendo: $q = y \cdot 10^{-6}$ - f = coefficiente tabulato in funzione della latitudine «E».

In questa equazione i valori di «f» risultano tabulati, dall'**I.G.M.**, in funzione dei valori di «E» (essendo «E» il valore, espresso in chilometri, delle coordinate piane cartesiane **Gauss-Boaga**).

Per contro l'Autore, volendo evitare inutili complicazioni dovute alla non reciproca linearità delle funzioni rappresentative delle due serie di valori utilizza, [fig. 03], come algoritmo, una semplice equazione polinomiale da egli stesso elaborata:

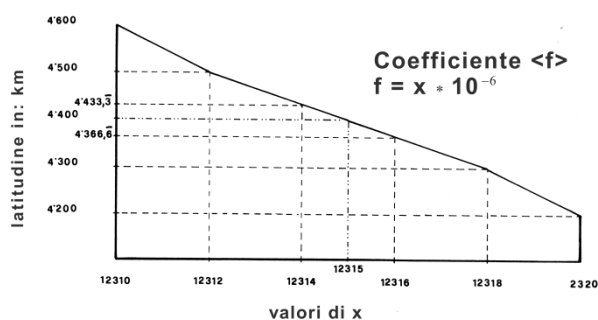
$$f = 0,01222817 + 1,04738 \cdot 10^{-10} \cdot E - 2,82137 \cdot 10^{-17} \cdot E^2 + 2,0225 \cdot 10^{-2} \cdot E^3 \quad [\text{fig. 03}]$$

essendo: E = valore della latitudine, espressa in metri, delle coordinate piane cartesiane valedoli, nell'approssimazione accettabile, sia per la rappresentazione di Gauss-Boaga sia per la rappresentazione UTM.

In tutti i casi il programma fornisce il valore del modulo di deformazione lineare sia considerando l'**Ellissoide Internazionale** non contratto sia, tenendo conto del coefficiente di riduzione del 0,4‰, considerando l'**E.I.** contratto.

Nell'attesa di ricalcolare tutti i valori, necessari per la costruzione delle nuove tavole numeriche, si sfruttarono inizialmente i dati presenti nelle tavole già pubblicate dell'**Army Map Service**, anch'esse riferite all'Ellissoide Internazionale, nelle quali era stata già considerata la contrazione di scala del 0,4‰ e risultavano pertanto utilizzabili appieno per la nostra cartografia nazionale.

Le Tavole dell'Army Map Service, costruite per fusi di 6° di ampiezza (in longitudine) e per un range compreso fra 0° e 80° (in latitudine) erano basate ugualmente su gli sviluppi



in serie ma non prevedevano più l'uso dei logaritmi (peculiarità non indifferente); consentivano inoltre la trasformazione dalle coordinate piane alle coordinate geografiche senza dover ricorrere al metodo delle successive approssimazioni.

Le coordinate piane «x» ed «y» del punto «P» si potevano ricavare dalle corrispondenti coordinate geografiche «φ» e «λ» risolvendo le formule di corrispondenza ottenute mediante i seguenti sviluppi in serie; esprimendo le longitudini in secondi di arco sessagesimale e ponendo $p = \lambda \cdot 10^{-4}$, si aveva:

$$\begin{cases} x = (I) + (II)p^2 + (III)p^4 + A_6 \\ y = (IV) + p + (V)p^3 + B_5 \end{cases} \quad [08]$$

Le coordinate geografiche «φ» ed «λ» del punto «P» si potevano ricavare peraltro dalle sue coordinate piane «x» ed «y» con le formule di corrispondenza ottenute sempre mediante sviluppi in serie; esprimendo le longitudini in archi di secondo sessagesimali e ponendo $q = y \cdot 10^{-6}$ si aveva:

$$\begin{cases} \phi = \phi' (VII)q^2 + (VIII)q^4 - D_6 \\ \lambda = (IX)q - (X)q^3 + E_6 \end{cases} \quad [09]$$

Le quantità entro parentesi erano tabulate di 1' in 1' mentre i valori dei termini A_6 , B_5 , D_6 , E_6 , erano forniti da appositi grafici in cui si entrava o con i valori di «φ» e «λ» o con i valori di «φ'» e «y»; questo consentiva di ottenere esatto il centimetro, nel calcolo delle coordinate piane, ed esatto il millesimo di secondo di grado sessagesimale, nel calcolo delle coordinate geografiche.

La risoluzione delle [08] e delle [09] non presentava alcuna difficoltà di calcolo, neanche con semplici calcolatrici meccaniche, per contro si rendeva necessario sia interpolare molti termini sia ricavare le potenze di «p» e di «q»; il calcolo di trasformazione, e il relativo calcolo inverso eseguito quale verifica, richiedevano pertanto un tempo piuttosto lungo, circa trenta minuti primi (30^m) per un operatore di buona esperienza.

Per ovviare a tale inconveniente, l'Istituto Geografico Militare ha costruito le **Tavole ausiliarie per i calcoli sul piano della proiezione di Gauss-Boaga. Ellissoide Internazionale** le quali permettono la trasformazione dalle *coordinate geografiche ellissoidiche* alle *coordinate piane Gauss-Boaga* e viceversa.

Quest'ultime sono praticamente identiche a quelle dell'**Army Map Service** ed utilizzano equazioni molto simili, ma l'aggiunta di due ulteriori tabelle numeriche evita per contro qualsiasi interpolazione; il tempo necessario per il calcolo di conversione, e per la successiva verifica, si riduce così a circa la metà rispetto alle precedenti tavole.

Costruite per fusi di 6° di ampiezza, in longitudine, e per un range compreso fra 36° 30' e 47° 50', in latitudine, prevedono la riduzione di scala del 0,4%.

Le *coordinate geografiche* si ottengono esatte fino a 0,001" per contro le *coordinate gaussiane* possono risultare approssimate di una o due unità sulla cifra dei centimetri.

Tenendo conto che per i due fusi in cui è compresa l'Italia si ha:

Fuso ovest (+ 9° da Greenwich) $\omega_0 = - 3^\circ 27' 08,40''$ da M.Mario

Fuso est (+ 15° da Greenwich) $\omega_0 = + 2^\circ 32' 51,60''$ da M.Mario

Indicando con φ e ω le coordinate geografiche note di un generico punto P e con ω₀ la longitudine del meridiano centrale del fuso di riferimento, il valore della longitudine, riferita al meridiano centrale del fuso, diviene:

$$\lambda = | \omega - \omega_0 |$$

Per il calcolo dei valori di X e Y si entra nelle tavole con i valori φ_t e λ_t, ottenuti dall'arrotondamento per difetto, ai 10', delle coordinate geografiche note φ e λ; si leggono quindi i valori di X_t e Y_t ed i rispettivi valori sia delle differenze prime ΔXφ, ΔXλ e ΔYφ, ΔYλ sia delle differenze seconde ΔXφφ, ΔXλλ, ΔXφλ e ΔYφφ, ΔYλλ, ΔYφλ.

Posto infine (δ φ) = φ - φ_t e (δ λ) = λ - λ_t si ricavano i coefficienti:

$$a = \frac{\delta \phi}{10'} ; \quad b = \frac{\delta \lambda}{10'} ; \quad c = \frac{a(1-a)}{2} ; \quad d = \frac{b(1-b)}{2} ; \quad e = a \cdot b$$

e i valori delle coordinate gaussiane possono essere ottenuti per mezzo delle seguenti formule:

$$\begin{cases} X = X_t + \delta X = X_t + (a \Delta X\phi + b \Delta X\lambda - c \Delta X\phi\phi - d \Delta X\lambda\lambda \pm e \Delta X\phi\lambda) \\ Y = Y_t + \delta Y = Y_t + (-a \Delta Y\phi + b \Delta Y\lambda + c \Delta Y\phi\phi \mp d \Delta Y\lambda\lambda - e \Delta Y\phi\lambda) \end{cases} \quad [10]$$

in cui gli operatori superiori vengono usati per $\phi < 45^\circ$; quelli inferiori per $\phi > 45^\circ$.

Per il calcolo dei valori di ϕ e ω si entra nelle tavole con i valori di X_t e Y_t , ottenuti dall'arrotondamento per difetto, ai 10 km, delle coordinate piane note X e Y ; si leggono quindi i valori di λ_t e ϕ_t ed i rispettivi valori sia delle differenze prime $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\phi x$, $\Delta\phi y$ sia delle differenze seconde $\Delta\lambda_{xx}$, $\Delta\lambda_{yy}$, $\Delta\lambda_{xy}$, $\Delta\phi_{xx}$, $\Delta\phi_{yy}$, $\Delta\phi_{xy}$.

Posto infine $(\delta X) = X - X_t$ e $(\delta Y) = Y - Y_t$ si ricavano i coefficienti:

$$a = \delta X \cdot 10^{-4} ; \quad b = \delta Y \cdot 10^{-4} ; \quad c = \frac{a(1-a)}{2} ; \quad d = \frac{b(1-b)}{2}$$

e i valori della ϕ e della ω possono essere ottenuti per mezzo delle seguenti formule:

$$\begin{cases} \phi = \phi_t + \delta\phi = \phi_t + (a \Delta\phi_x - b \Delta\phi_y + c \Delta\phi_{xx} + d \Delta\phi_{yy} - e \Delta\phi_{xy}) \\ \lambda = \lambda_t + \delta\lambda = \lambda_t + (a \Delta\lambda_x + b \Delta\lambda_y - c \Delta\lambda_{xx} + d \Delta\lambda_{yy} + e \Delta\lambda_{xy}) \end{cases} \quad [11]$$

Le coordinate geografiche del generico punto «P» saranno pertanto:

$$\begin{cases} \phi = \phi \\ \lambda = \omega_0 \end{cases}$$

Le tavole numeriche esaminate fino ad ora si riferiscono ai procedimenti di conversione fra i sistemi di coordinate propri della cartografia italiana, inquadrati nel sistema geodetico nazionale e pertanto riguardano esclusivamente il reticolato *geografico italiano* (1940) e il reticolato piano *Gauss-Boaga*.

Inquadramenti geodetici

Nazionale, Europeo

La rete geodetica italiana, come parimenti quella degli altri stati, costituisce un assestante sistema nazionale di riferimento, [tav. 04], e pertanto le coordinate di tutti i suoi punti non possiedono alcuna relazione con le coordinate dei punti appartenenti a sistemi nazionali differenti.

In questo primo inquadramento, orientato a **M. Mario** (Roma), i valori delle coordinate geografiche ellissoidiche dell'*osservatorio astronomico di Monte Mario*, rispettivamente dall'equatore e dal semi meridiano passante per **Greenwich**, risultano :

$$\begin{cases} \phi = 41^\circ 55' 25",51 & \text{nord} \\ \lambda = 12^\circ 27' 08",40 & \text{est da Greenwich} \end{cases}$$

e i corrispondenti valori, in coordinate Gauss-Boaga, risultano:

$$\begin{cases} 4\,644\,532,04 \text{ m} & \text{nord} \\ 1\,288\,739,39 \text{ m} & \text{Fuso ovest} \end{cases}$$

Negli anni cinquanta molti stati europei sentirono l'esigenza di unificare le varie cartografie e convenirono, nell'ambito dell'Associazione Nazionale di Geodesia, non solo di adottare un'unica proiezione: l'**Universal Transverse Mercator projection (UTM)** ma anche di procedere ad un calcolo di compensazione delle reti geodetiche europee onde riferire le coordinate di tutti i punti ad un unico sistema; come superficie di riferimento fu scelto l'Ellissoide Internazionale.

I complessi calcoli, indispensabili allo scopo, furono eseguiti dal **Coast and Geodetic Survey** e dall'**Army Map Service** statunitensi su calcolatori IBM .

Il centro di emanazione fu stabilito a **Potsdam**, presso Boon, ed il sistema assunse la denominazione di **European Datum 1950** indicato più brevemente con la sigla (**ED 50**).

In questo secondo inquadramento, a ragione della diversa rete di compensazione e del diverso orientamento, dell'ellissoide rispetto al geoide, i valori delle coordinate geografiche ellissoidiche dell'*osservatorio astronomico di Monte Mario*, rispettivamente dall'equatore e dal semi meridiano passante per **Greenwich**, ottenute tramite misurazioni di astronomia geodetica, risultano:

$$\begin{aligned} \phi &= 41^\circ 55' 31,487'' & \text{nord} \\ \lambda &= 12^\circ 27' 10,933'' & \text{est da Greenwich} \end{aligned}$$

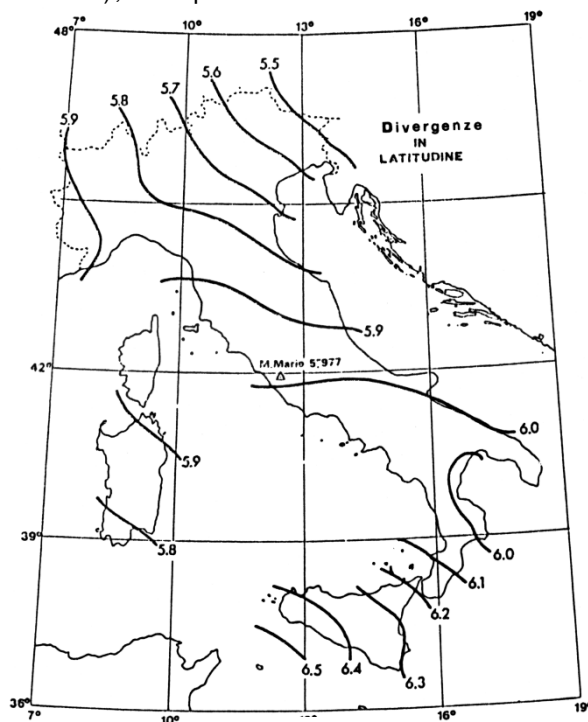
e i corrispondenti valori, in coordinate piane UTM, risultano:

$$\begin{aligned} N &= 4\,644\,714,65 \text{ m} \quad \text{nord} \\ E &= 288\,803,22 \text{ m} \quad \text{Fuso 33} \end{aligned}$$

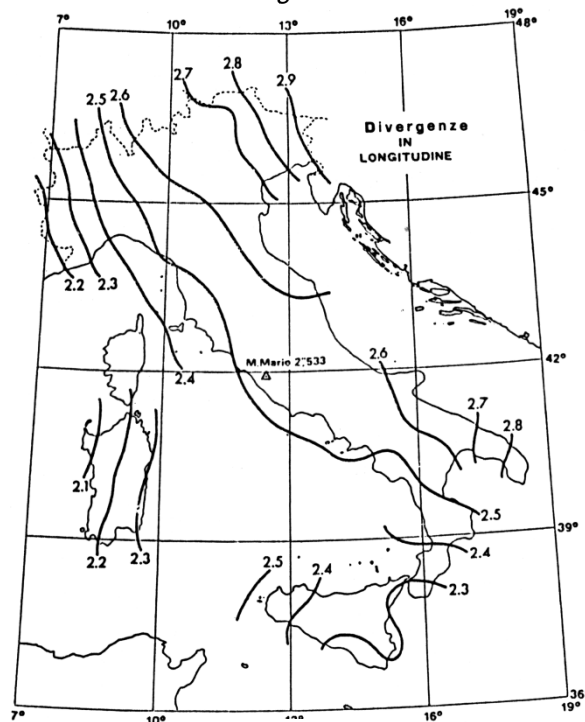
Per quanto concerne M.Mario si ricava dunque che, relativamente ai due differenti inquadramenti, la *divergenza* in latitudine è di $5,97''$, o di 182,61 m, e la *divergenza* in longitudine è di $2,53''$, o 63,83 m; parimenti risultano differenti i valori, sia delle coordinate geografiche sia delle coordinate piane, di tutti i punti del nostro territorio nazionale ricavati nei due sistemi.

Fra le **coordinate geografiche italiane** (1940) e le **coordinate geografiche europee** (ED 50) non sussiste purtroppo alcuna relazione analitica e, pertanto, la trasformazione fra le une e le altre non può avvenire per mezzo di sole funzioni matematiche elementari; la [fig. 04a] e la [fig. 04b] evidenziano graficamente le *divergenze*, espresse in secondi d'arco sessagesimali, esistenti fra i valori che le **coordinate geografiche ellissoidiche italiane** assumono nei due differenti inquadramenti, ambedue riferiti ad una medesima origine.

Recentemente, elaborando una grande quantità di dati, ottenuti sempre tramite misurazioni di astronomia geodetica (utilizzando satelliti artificiali tipo: **Echo**, **Pageos**, **Explorer**, ed altri), si è potuto ultimare il calcolo di compensazione di una *rete geodetica mondiale*.



[fig. 04a]



[fig. 04b]

formata da triangoli con lati lunghi alcune migliaia di chilometri, la quale estendendosi attorno a tutto il globo terrestre permetterà l'unificazione di tutti gli *inquadramenti geodetici* in un unico sistema di riferimento.

Formule compatte

L'evento delle calcolatrici elettroniche programmabili prima, e dei personal computer poi, ha reso presto obsolete le tavole numeriche riservando sempre maggiore importanza ai metodi di risoluzione del problema basati sull'impiego di formule compatte; con esse si esegue prima una proiezione conforme dell'ellissoide sulla sfera ed infine la proiezione di quest'ultima sul piano; consideriamo ad esempio le formule seguenti; da **Hirvonen**:

$$\begin{cases} x = B(\xi) \\ y = c \cdot \text{arcsenh} \left(\frac{\cos \xi \cdot \tan \varphi}{v} \right) \end{cases}$$

[12]

$$\begin{cases} \lambda = \arctan \left(\frac{v \cdot \sinh \left(\frac{y}{c} \right)}{\cos \xi} \right) \\ \varphi = \arctan (\tan \xi \cdot \cos (v \cdot \lambda)) \end{cases} \quad [13]$$

nelle quali:

$$c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}; \quad \xi = \arctan \frac{\tan \varphi}{\cos (v_1 \cdot \lambda)}; \quad v_1 = \sqrt{1+e'^2 \cdot \cos^2 \varphi}; \quad v = \sqrt{1+e'^2 \cdot \cos^2 \xi}$$

essendo: c = raggio di curvatura polare, a = semiasse maggiore, b = semiasse minore.

e le funzioni B(ξ) e ξ sono date da:

$$x = B(\xi) = A_1 \cdot \xi - A_2 \cdot \sin(2\xi) + A_4 \cdot \sin(4\xi) - A_6 \cdot \sin(6\xi)$$

$$\xi = \bar{B}(x) = \frac{x}{A_1} + B_2 \cdot \sin\left(2 \frac{x}{A_1}\right) + B_4 \cdot \sin\left(4 \frac{x}{A_1}\right) + B_6 \cdot \sin\left(6 \frac{x}{A_1}\right)$$

I coefficienti A₁, A₂, A₄, A₆, B₂, B₄, B₆, sono funzioni dei parametri dell'ellissoide di riferimento; nel caso dell'**Ellissoide Internazionale (Hayford)** si ha.

A ₁ = 6 367 654,500 06 m/ra	B ₁ = 1/A ₁ = 8°,9979410021 • 10 ⁻⁶
A ₂ = 16 107,034 68 m	B ₂ = 0°,1449300705
A ₄ = 16,976 21 m	B ₄ = 0°,2138508 • 10 ⁻³
A ₆ = 0,022 27 m	B ₆ = 0°,4322 • 10 ⁻⁶

Altri importanti parametri dell'**Ellissoide Internazionale** sono:

a = 6 378 388,000 m	b = 6 356 911,946 m
c = 6 399 936,608 m	α = 1/297 = 0,003 367 003
e ² = 0,006 722 670 022	e' ² = 0,006 768 170 197

con noto significato dei simboli.

Per coloro che non potessero usufruire direttamente delle funzioni iperboliche ricordiamo che è facile sostituirle con le corrispondenti funzioni quadratiche:

$$\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad \quad \quad \operatorname{arcsinh} \alpha = \log \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} \right)$$

Le formule di corrispondenza, come pure le [10] e [11], e parimenti le (12) e (13), forniscono valori negativi sia per le latitudini nell'emisfero meridionale (emisfero sud) sia per le longitudini ad ovest del meridiano centrale del fuso di riferimento; per quanto riguarda le coordinate piane si preferisce peraltro esprimerle sempre mediante valori positivi, questo per ovviare ad eventuali errori grossolani dovuti a dimenticanza di segno.

La posizione del punto è pertanto espressa mediante delle *coordinate convenzionali* ottenute aggiungendo algebricamente, al valore delle coordinate ricavate, ad esempio, con le [12] e le [13], i valori delle costanti numeriche, proprie del sistema di riferimento, dette *false origini*.

Per le coordinate **Gauss-Boaga** si ha:

x ₀ = 0 km (emisfero nord);	x ₀ = 10 000 km (emisfero sud)
y ₀ = 1 500 km (meridiano centrale del 1° fuso di riferimento)	
y ₀ = 2 520 km (meridiano centrale del 2° fuso di riferimento)	

Per le coordinate **U.T.M.** si ha:

x ₀ = 0 km (emisfero nord);	x ₀ = 10 000 km (emisfero sud)
y ₀ = 500 km (meridiano centrale di ogni fuso di riferimento)	

il che equivale ad eseguire una semplice traslazione di assi:

emisfero nord	$\begin{cases} N = x \\ E = y + y_0 \end{cases}$	emisfero sud	$\begin{cases} N = x + x_0 \\ E = y + y_0 \end{cases}$
---------------	--	--------------	--

In genere si indicano con «x» ed «y» i valori reali (delle *coordinate chilometriche*), col segno, ottenuti delle precedenti formule, mentre si indicano con «N» (Nord) ed «E» (Est) i

valori ottenuti con l'aggiunta delle *false origini*; nel nostro emisfero (settentrionale) i valori di «x» coincidono sempre con i valori di «N».

Le formule compatte [12] e [13], come peraltro le formule di corrispondenza, non tengono conto della riduzione di scala, propria della nostra cartografia, del 0,4‰; si deve pertanto agire separatamente moltiplicando i valori delle coordinate piane per il rapporto di riduzione $m_r = 0,9996$.

Le formule compatte inoltre riguardano sia l'*inquadratura geodetica nazionale* sia l'*inquadratura geodetica medio europea*, purché la conversione avvenga esclusivamente fra sistemi di coordinate inquadrati nella medesima rete geodetica di riferimento.

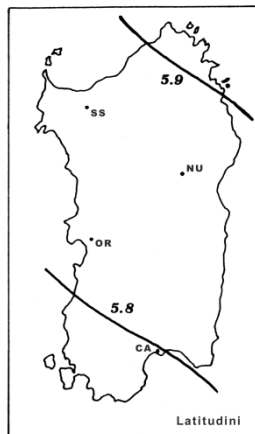
Equazioni approssimate

Le *divergenze* esistenti fra i valori delle *coordinate geografiche italiane*, nei due differenti inquadramenti, porterebbe inevitabilmente, se non si mettesse in atto qualche accorgimento particolare, ad introdurre delle approssimazioni tali da vincolare già a monte la precisione ottenibile nella conversione fra le *coordinate geografiche italiane* (1940) e le *coordinate geografiche europee* (ED 50).

Per quanto concerne la **Sardegna**, [fig. 05a] [fig. 05b], si ricava infatti che:

in **coordinate geografiche** le *divergenze*, relative alle **latitudini** [fig. 05a] hanno valori compresi fra circa 5,76" e circa 5,92", con un range di 0,16" ed un valore medio di 5,84".

le *divergenze* relative alle **longitudini** [fig. 05b] hanno valori compresi fra circa 2,04" e circa 2,34", con un range di 0,30" ed un valore medio di 2,19".

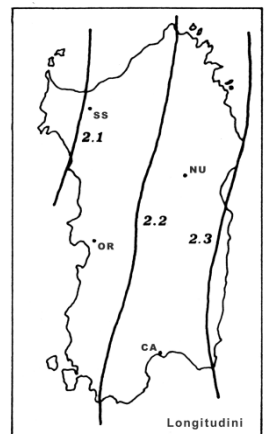


[fig. 05a]

In **coordinate piane** le *divergenze*, relative alle **latitudini**, hanno valori compresi fra circa 178 m e circa 183 m, con un range di 5 m ed un valore medio di 180,5 m

le *divergenze* relative alle **longitudini** risultano comprese fra circa 48 m e circa 56 m con un range di 8 m e un valore medio di 52 m.

Se riteniamo sufficiente operare con l'approssimazione, in *coordinate geografiche*, di circa otto centesimi di secondo d'arco sessagesimale (0,08"), per le latitudini, e di circa quindici centesimi di secondo d'arco (0,15"), per le longitudini, (ai quali corrisponde un'approssimazione, in *coordinate piane cartesiane*, di circa 2,5 metri, per le



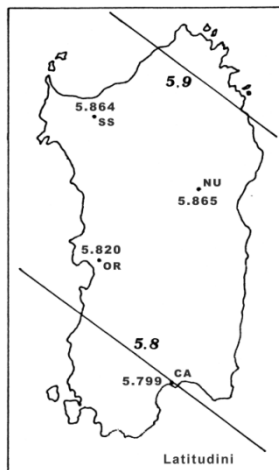
[fig. 05b]

latitudini, e di circa 4 metri, per le longitudini, non sussiste alcun problema particolare; è sufficiente considerare, quali valori delle *divergenze*, delle *coordinate geografiche ellissoidiche* che ciascun punto «P», situato sul territorio sardo, assume nei due differenti inquadramenti, i valori medi, dedotti dalle [fig. 05a] e [fig. 05b]:

$$\psi_{\phi} = \psi'_{\phi} = 5,84''$$

$$\psi_{\lambda} = \psi'_{\lambda} = 2,19''.$$

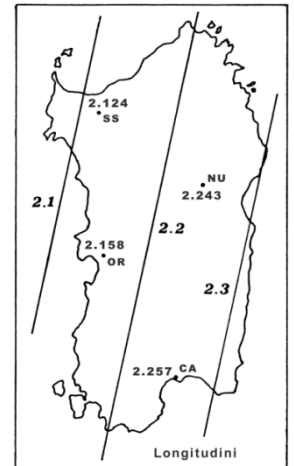
essendo: ψ_{ϕ} e ψ_{λ} , divergenze medie della latitudine; ψ'_{ϕ} e ψ'_{λ} , divergenze medie della longitudine; ambedue da utilizzarsi, in una prima ipotesi semplificativa, nelle equazioni [16] e [17] rispettivamente al posto di ζ_{ϕ} , ζ_{λ} , ζ'_{ϕ} , ζ'_{λ} .



[fig. 06a]

Per contro l'Autore, volendo discriminare sia *distanze angolari* sia *distanze lineari* significativamente minori, utilizza un suo particolare metodo per interpolare fra le *isometriche* indicative delle *divergenze* dei valori assunti, dalle *coordinate geografiche ellissoidiche*, relative alla sola Sardegna, di un generico punto «G», nei due diversi inquadramenti.

L'approccio è consistito nel ricavare, applicando il noto metodo dei minimi quadrati, le equazioni delle rette di regressione che meglio approssimano le curve dei valori delle *divergenze* evidenziate in [fig. 05a] e [fig. 05b].



[fig. 06b]

Si è poi imposto, agendo separatamente sia nell'ambito delle *latitudini* sia nell'ambito delle *longitudini*, la condizione al contorno della costanza del *gradiente di divergenza* che equivale ad imporre un costante incremento dei valori delle *divergenze* per un costante incremento delle distanze angolari.

Si è pertanto proceduto a mediare le equazioni delle rette di regressione, fra le appartenenti allo stesso ambito, in modo da renderle parallele fra loro, [fig. 06a] e [fig. 06b], e, nell'ambito delle longitudini, anche equidistanti [fig. 06b].

L'Autore è così pervenuto all'enunciazione di due coppie di equazioni tramite le quali si può calcolare il valore stimato delle divergenze, sia delle *latitudini* sia delle *longitudini*, in funzione delle coordinate geografiche ellissoidiche note di un generico punto «G», equazioni [14] e [15]: i valori delle *divergenze* possono inoltre essere facilmente estrapolati, essendo lineare la funzione dei rispettivi gradienti, oltre le curve estreme dei valori noti, restando nei limiti della medesima approssimazione.

Note le *coordinate geografiche italiane* φ e λ si ha:

$$\begin{cases} \zeta_{\varphi} = \{[(4,5 - \lambda) \cdot 0,569 + \varphi] - 39,894\} \cdot 0,054 + 5,8 \\ \zeta_{\lambda} = \{3,1122 - [\lambda - (41,5 - \varphi) \cdot 0,273]\} \cdot 0,1377 + 2,2 \end{cases} \quad [14]$$

essendo: ζ_{φ} = divergenza stimata della latitudine, espressa in secondi d'arco sessagesimali, di un generico punto $P \equiv (\varphi, \lambda)$ - ζ_{λ} = divergenza stimata della longitudine, espressa in secondi d'arco sessagesimali, del punto $P \equiv (\varphi, \lambda)$.

Note la *coordinate geografiche (ED 50)* φ' e λ' si ha:

$$\begin{cases} \zeta'_{\varphi} = \{[(\lambda' - 8) \cdot 0,569 + \varphi'] - 39,8691\} \cdot 0,054 + 5,8 \\ \zeta'_{\lambda} = \{[\lambda' + (41,5 - \varphi') \cdot 0,273] - 9,3403\} \cdot 0,1377 + 2,2 \end{cases} \quad [15]$$

essendo: ζ'_{φ} = divergenza stimata della latitudine, espressa in secondi d'arco sessagesimali, di un generico punto $P \equiv (\varphi, \lambda)$ - ζ'_{λ} = divergenza stimata della longitudine, espressa in secondi d'arco sessagesimali, del punto $P \equiv (\varphi, \lambda)$.

Utilizzando le [14] e [15], si perviene infine facilmente ad altri due gruppi di equazioni tramite i quali, effettuando una semplice variazione del sistema di riferimento, si può eseguire la trasformazione fra le *coordinate geografiche italiane* (1940) e le *coordinate geografiche europee* (ED 50); con semplici considerazioni di geometria analitica, applicate ai due inquadramenti, le formule per la trasformazione diretta, dalle *coordinate geografiche italiane* (1940) alle *coordinate geografiche europee* (ED 50), risultano:

$$\begin{cases} \varphi'_{ED50} = \varphi_{1940} + \zeta_{\varphi} \\ \lambda'_{ED50} = 12^{\circ} 27' 08,40'' - \lambda_{1940} + \zeta_{\lambda} \end{cases} \quad [16]$$

e le formule per la trasformazione inversa risultano:

$$\begin{cases} \varphi_{1940} = \varphi'_{ED50} - \zeta'_{\varphi} \\ \lambda_{1940} = 12^{\circ} 27' 08,40'' - \lambda'_{ED50} + \zeta'_{\lambda} \end{cases} \quad [17]$$

per semplice traslazione del sistema di riferimento.

Si vede ora come è possibile realizzare la conversione, fra le *coordinate geografiche ellissoidiche italiane* (1940) e le *coordinate piane cartesiane ortogonali* U.T.M. (o parimenti dalle *coordinate geografiche ellissoidiche europee* (ED 50) e le *coordinate piane cartesiane ortogonali* Gauss-Boaga) e viceversa, inquadrando nei due diversi orientamenti, sfruttando semplici algoritmi.

Riepilogando

♦ Per eseguire la conversione dalle *coordinate geografiche italiane* (1940) alle *coordinate piane* Gauss-Boaga, ambedue inquadrando nella rete **geodetica nazionale italiana**, con orientamento a **M. Mario** (Roma), si sono utilizzate le formule compatte [12]; le formule [13] per la conversione inversa.

♦ Per eseguire la conversione dalle *coordinate geografiche europee* (ED 50) alle *coordinate piane* U.T.M., ambedue inquadrando nella rete **geodetica europea**, con orientamento medio europeo (ED 50) a **Potsdam** (presso Boon), si sono utilizzate le stesse formule compatte [12]; le formule [13] per la conversione inversa.

♦ Per eseguire la conversione dalle *coordinate geografiche italiane* (1940) alle *coordinate geografiche europee* (ED 50), inquadrando ciascuna in una diversa rete geodetica (in quella *nazionale italiana* la prima ed in quella *europea* la seconda), si sono prima ricavati i valori di ζ_{φ} e di ζ_{λ} , per mezzo delle [14] proposte dall'Autore, e successivamente si sono utilizzate le equazioni [16].

♦ Per la conversione inversa, si sono ricavate prima i valori di ζ'_ϕ e di ζ'_λ e successivamente si sono utilizzate le [17].

♦ Per eseguire la conversione dalle *coordinate geografiche italiane* (1940) alle *coordinate piane* U.T.M., inquadrata ciascuna in una diversa rete geodetica (in quella *nazionale italiana* la prima ed in quella *europea* la seconda), si è eseguita, una volta ricavati i valori di ζ_ϕ e di ζ_λ per mezzo delle [14] proposte dall'Autore, la conversione dalle *coordinate geografiche italiane* (1940) alle *coordinate geografiche europee* (ED 50), utilizzando le equazioni [16], e successivamente la conversione, dalle *coordinate geografiche italiane* (1940) alle *coordinate piane* U.T.M., utilizzando le formule compatte [12] e considerando la riduzione di scala del 0,4‰.

♦ Per eseguire la conversione dalle *coordinate geografiche europee* (ED 50) alle *coordinate piane* Gauss-Boaga, inquadrata ciascuna in una diversa rete geodetica (in quella *europea* la prima ed in quella *nazionale italiana* la seconda), si è eseguita prima, una volta ricavati i valori di ζ'_ϕ e di ζ'_λ per mezzo delle [15] proposte dall'Autore, la conversione dalle *coordinate geografiche europee* (ED 50) alle *coordinate geografiche italiane* (1940), utilizzando le equazioni [17], e successivamente la conversione, dalle *coordinate geografiche europee* (ED 50) alle *coordinate piane* U.T.M., utilizzando le formule compatte [12] e considerando la riduzione di scala del 0,4‰.

♦ Per eseguire la conversione dalle *coordinate piane* U.T.M. alle *coordinate geografiche italiane* (1940), si è eseguita prima la conversione dalle *coordinate piane* U.T.M. alle *coordinate geografiche europee* (ED 50), utilizzando le formule compatte [13] e considerando la riduzione di scala del 0,4‰; successivamente, una volta ricavati i valori di ζ'_ϕ e di ζ'_λ per mezzo delle [15] proposte dall'Autore, si è eseguita la conversione dalle *coordinate piane* U.T.M. alle *coordinate geografiche italiane* utilizzando le equazioni [17].

♦ Per eseguire la conversione dalle *coordinate piane* Gauss-Boaga alle *coordinate geografiche europee* (ED 50), si è eseguita prima la conversione dalle *coordinate piane* Gauss-Boaga alle *coordinate geografiche italiane* (1940), utilizzando le formule compatte [13] e considerando la riduzione di scala del 0,4‰; successivamente, una volta ricavati i valori di ζ_ϕ e di ζ_λ per mezzo delle [14] proposte dall'Autore, si è eseguita la conversione dalle *coordinate piane* Gauss-Boaga alle *coordinate geografiche europee* (ED 50) utilizzando le equazioni [16].

La conversione dalle *coordinate piane* U.T.M. alle *coordinate piane* Gauss-Boaga, e viceversa, fornisce dei risultati un po' meno precisi rispetto a quelli forniti dalle altre conversioni; il motivo è da ricercarsi nel metodo scelto per eseguire i calcoli.

L'importanza alquanto limitata che rivestono queste ultime conversioni giustifica senz'altro la decisione di non ricorrere a metodi più precisi ma sicuramente molto più complessi.

Si è proceduto infatti con l'eseguire: prima la conversione dalle *coordinate piane*, prese in esame, alle *coordinate geografiche* appartenenti al medesimo *sistema geodetico*, poi la conversione alle *coordinate geografiche* appartenenti al differente *sistema geodetico*, ed infine la conversione di quest'ultime alle *coordinate piane* appartenenti al medesimo *sistema di riferimento*,

L'Autore ha realizzato, a tal uopo, un programma, scritto in «C», il quale contiene una serie di *opzioni* per mezzo delle quali si possono eseguire le conversioni, fra i differenti *sistemi di coordinate*, anche se inquadrati in un diverso *sistema geodetico*:

Con la prima opzione si ottengono, a partire dalle ***coordinate geografiche ellissoidiche italiane (1940)***, sia le *coordinate geografiche* (ED 50) sia le *coordinate piane* UTM.

Con la seconda opzione si ottengono, a partire dalle ***coordinate geografiche ellissoidiche italiane (ED 50)***, sia le *coordinate geografiche* (1940) sia le *coordinate piane* UTM.

Con la terza opzione si ottengono, a partire dalle ***coordinate piane cartesiane ortogonali UTM***, sia le *coordinate geografiche* (1940) sia le *coordinate geografiche* (ED 50).

La quarta opzione introduce un'ulteriore serie di opzioni, dedicate elusivamente alle ***coordinate piane cartesiane ortogonali Gauss-Boaga***, con le quali si ottiene la conversione rispettivamente:

fra le *coordinate geografiche* (1940) e le *coordinate piane* Gauss-Boaga.

fra le *coordinate geografiche* (ED 50) e le *coordinate piane* Gauss-Boaga.

fra le *coordinate piane* UTM e le *coordinate piane* Gauss-Boaga.

fra le *coordinate piane* Gauss-Boaga e le *coordinate* sia *geografiche italiane* (1940) sia *geografiche europee* (ED 50) sia *piane* UTM.

In tutti i casi sono sempre indicati i valori delle *divergenze*, sia della *latitudine* sia della *longitudine*, calcolate nel punto di coordinate note, per mezzo delle [14] e delle [15].

Osservazioni

Considerando l'indeterminazione dovuta sia all'imprecisione nella stima dei valori delle *divergenze* sia all'imprecisione imputabile ai complessi algoritmi di cui ci si è avvalso, comprendenti varie funzioni sia quadratiche sia trigonometriche sia iperboliche, ritengo si possa considerare attendibile l'approssimazione al decimo di secondo d'arco sessagesimale (0,1"), per quanto concerne le *coordinate geografiche ellissoidiche*, ed al metro e mezzo (1,5 m), per quanto concerne le *coordinate piane cartesiane*.

Dovrebbe comunque essere implicito che potendo disporre di sofisticati programmi di calcolo utilizzabili su potenti **main frame**, con banca dati composta eventualmente da mappe numeriche, il procedimento proposto dall'Autore perde completamente di significato; l'intenzione è semplicemente quella di fornire, a tutti coloro che possiedono un Personal Computer, una serie di programmi semplici, veloci nell'uso e che forniscano nel contempo risultati sufficientemente approssimati.

Nell'indicare la posizione degli ingressi delle cavità, gli speleologi utilizzano generalmente l'approssimazione al secondo di grado sessagesimale (lo stesso ordine di grandezza peraltro col quale sono indicati i vertici di quadrettatura negli elementi al 25 000 editi dall'I.G.M.); in questo caso le equazioni [16] e [17] possono acquisire una forma decisamente più semplice.

E' sufficiente infatti assumere i valori delle *divergenze* considerati come costanti; la trasformazione, dalle *coordinate geografiche italiane* (1940) alle *coordinate geografiche europee* (ED 50), può pertanto avvenire mediante le equazioni:

$$\begin{cases} \varphi'_{ED\ 50} = \varphi_{1940} + 6^{\circ} \\ \lambda'_{ED\ 50} = 12^{\circ} 27' 11'' - \lambda_{1940} \end{cases} \quad [18]$$

valevole esclusivamente per la Sardegna.

La trasformazione per contro, dalle *coordinate geografiche europee* (ED 50) alle coordinate italiane (1940), può avvenire mediante le equazioni:

$$\begin{cases} \varphi_{1940} = \varphi'_{ED\ 50} - 6^{\circ} \\ \lambda_{1940} = 12^{\circ} 27' 11'' + \lambda'_{ED\ 50} \end{cases} \quad [19]$$

parimenti valevole esclusivamente per la Sardegna.

e i calcoli risultano quasi immediati.

Conclusioni

E' importante sottolineare che nei «*nuovi*» elementi cartografici editi dall'I.G.M., sia al 50 000 sia al 25 000 è stata omessa l'indicazione del valore delle *coordinate geografiche ellissoidiche italiane*, riferite a **Monte Mario**, sui vertici di quadrettatura.

Utilizzando queste ultime Carte, le quali oltre ad essere più aggiornate coprono una superficie maggiore rispetto alle «*vecchie*» (risultano pertanto più idonee per le esigenze speleologiche anche se si possono avanzare alcune critiche che in questa sede è meglio tralasciare), e volendo continuare a fornire i dati catastali delle cavità espressi in coordinate geografiche ellissoidiche italiane si dovrà necessariamente ricorrere alle equazioni [17] o comunque alle [19].

Per coloro che non amano troppo le complicazioni, intravedo per contro all'orizzonte un sistema decisamente più semplice: è sufficiente segnare materialmente sulla cartina il punto «P», ottenuto partendo dai valori delle coordinate note, e poi, sempre sulla cartina, ricavarli i valori delle coordinate di «P» espresse nel sistema che più aggrada; si ha necessariamente bisogno della cartina topografica, delle squadrette, del goniometro, della matita, della calcolatrice e forse anche della gomma, si impiega molto più tempo, la precisione è decisamente inferiore ma, cosa forse ancora più importante, vi è sicuramente molto meno gusto!....e non è poco.

Indice analitico

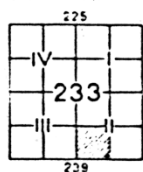
Paragrafi	pagina
Premessa	03
Abstract	03
Nozioni preliminari	05
<i>Reticolato geografico, Reticolato chilometrico</i>	
Proiezione conforme di Gauss	05
Correlazioni fra coordinate	06
<i>coordinate: piane cartesiane, geografiche ellissoidiche</i>	
Tavole numeriche	07
Inquadramenti geodetici	11
<i>Nazionale, Europeo</i>	
Formule compatte	12
Equazioni approssimate	14
Riepilogando	15
Osservazioni	17
Conclusioni	17
 Indice analitico	 19
Bibliografia	20
 Tavole	 21
Coordinate geografiche e chilometriche	23
Reticolato di Gauss-Boaga	24
Fusi Italiani secondo Boaga	25
Rete geodetica italiana	26

Bibliografia

- [R. 01] L. Aruta – P. Marescalchi (1985)
 Cartografia
Lettura delle carte
 Ed. Libreria Dario Flaccovio (Palermo)
- [R. 02] G. Bezoari - C. Monti - A. Selvini (1978)
 Topografia e Cartografia
 Ed: Cooperativa Libreria Universitaria del Politecnico (Milano)
- [R. 03] G. Binardi (1965)
 Corso di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria
 Ed: I.G.M. - Istituto Geografico militare – (Firenze)
- [R. 04] C. F. Capello (1968)
 La lettura delle carte topografiche e l'interpretazione dei paesaggi
 Ed. G. Giappichelli (Torino)
- [R. 05] C. Cavicchi (1925)
 Elementi di Cartografia
 Ed: I.G.M. - Istituto Geografico Militare – (Firenze)
- [R. 06] C. D'Arrigo (1990)
 Appunti di Geometria dell'ellissoide terrestre
 Ed: I.G.M. - Istituto Geografico militare – (Firenze)
- [R. 07] N. Franchi (1979)
 Elementi di Cartografia
 Ed: I.G.M. - Istituto Geografico Militare – (Firenze)
- [R. 08] Istituto Geografico Militare (1980)
 Tavole Ausiliarie
Per i calcoli sul piano della proiezione di Gauss-Boaga
 Ed. I.G.M. - Istituto Geografico Militare – (Firenze)
- [R. 09] A. N. Strahler (1985)
 Geografia fisica
 Ed. Piccin

Tavole

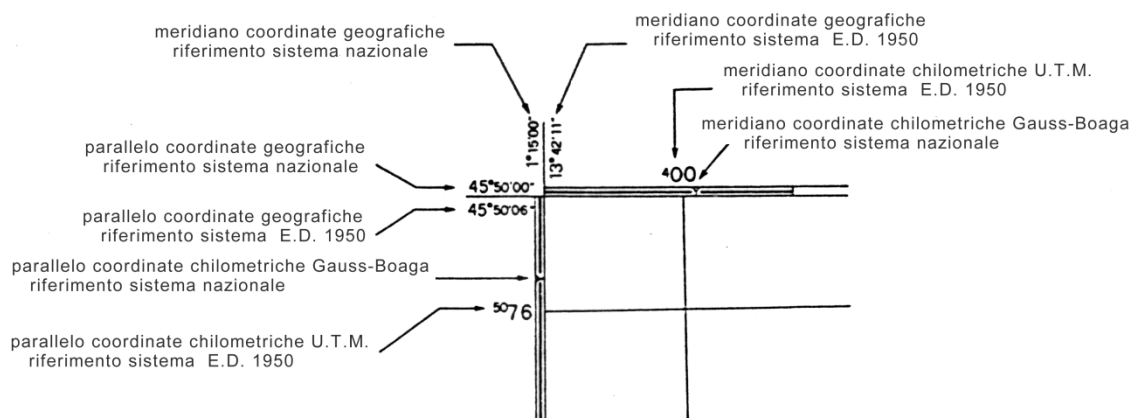
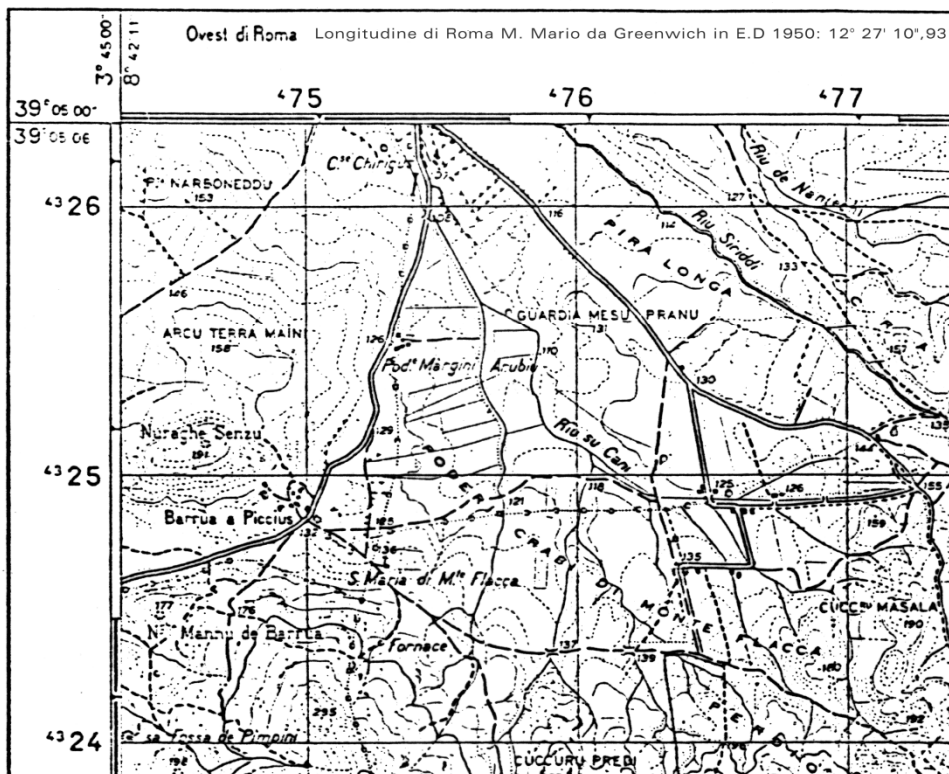
CARTA D'ITALIA ALLA SCALA DI 1:25 000



FOGLIO N° 233

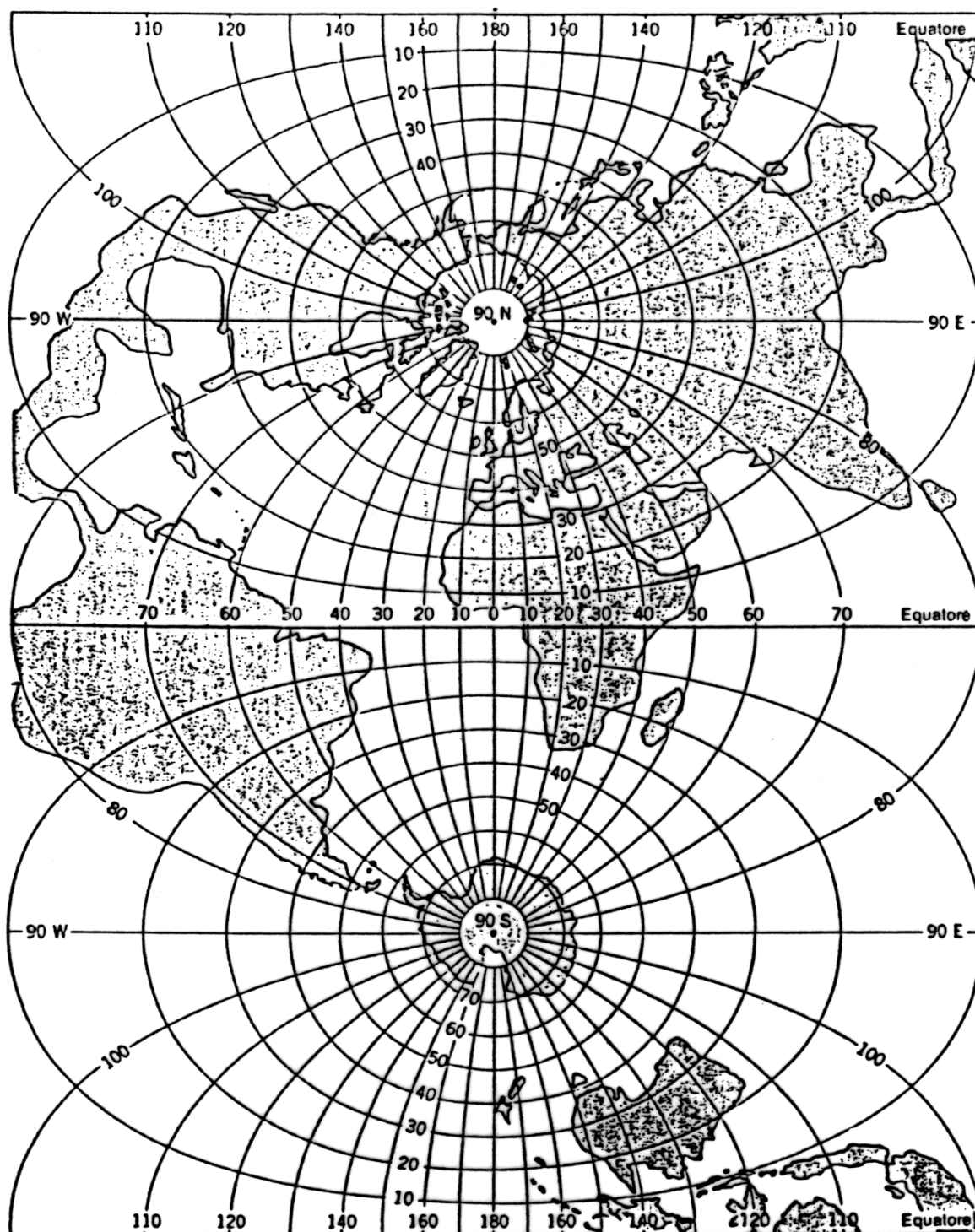
QUADRANTE: II

ORIENTAMENTO: S.O. IS CARILLUS



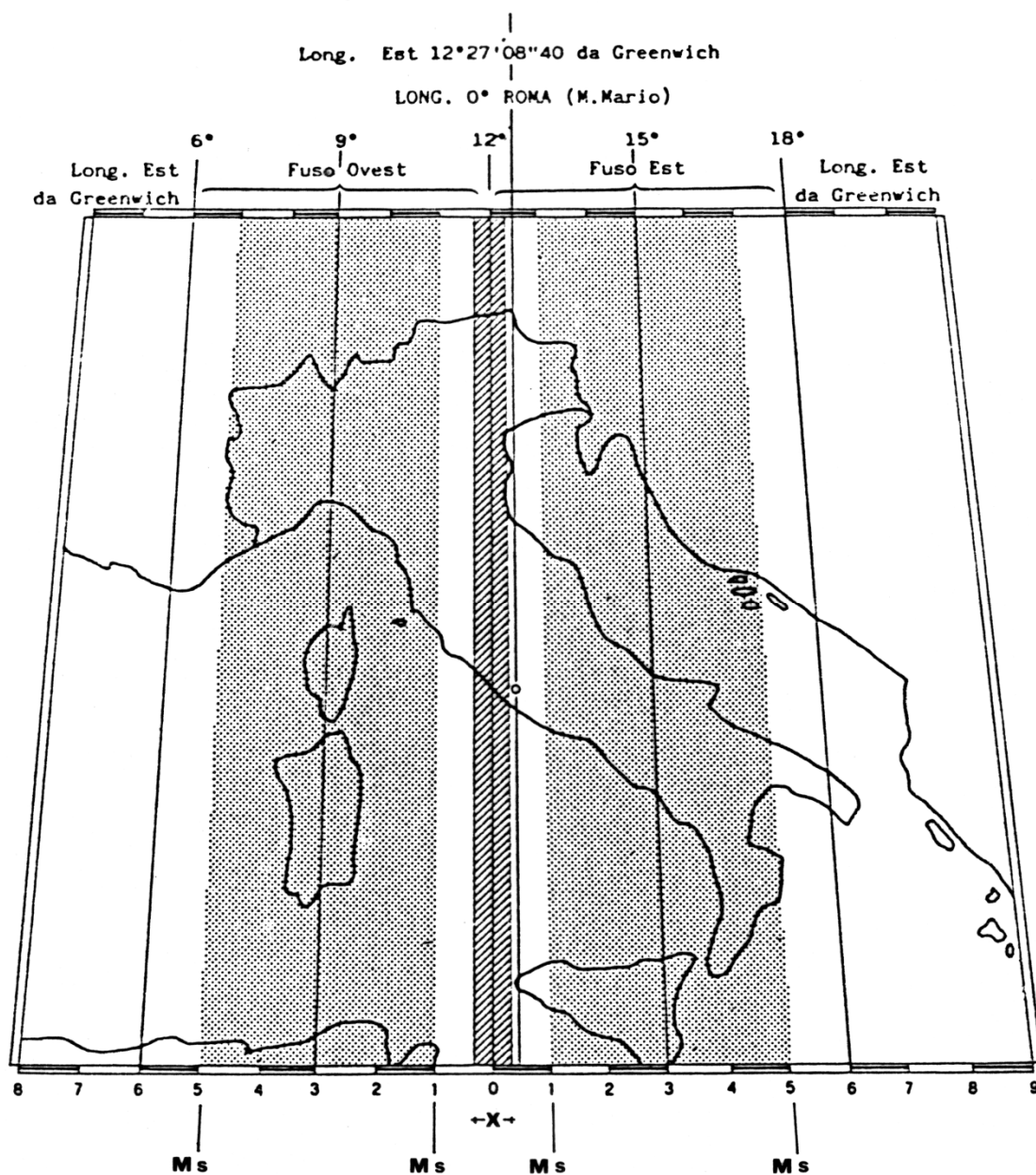
Specchietto riassuntivo delle coordinate riscontrabili su di una Tavoletta al 25 000

Immagine del reticolato geografico nella proiezione di Gauss



[tav. 02]

Suddivisione dell'Italia in Fusi secondo Gauss-Boaga



Rete geodetica italiana di 1° ordine

