Paolo Salimbeni

I quadrati magici
Costruzione e curiosità

Paolo Salimbeni

Edizione 7E8₀₉

Testi ludici

Prima edizione: **01 / 2019**
Ultima edizione: **09 / 2024**

Prefazione

Le prime testimonianze dei *quadrati magici* risalgono addirittura al VI secolo a.C., all'interno della cultura e della tradizione cinese; sappiamo, inoltre, che i *quadrati magici* erano conosciuti anche da matematici ed arabi e persiani ed indiani.

Ad essi erano attribuiti, un tempo, e significati mistici e proprietà magiche (da cui il loro nome) ed hanno affascinato e sedotto molti artisti, a causa delle misteriose proprietà esoteriche a essi attribuite.

Al giorno d'oggi, questi oggetti matematici, fanno parte della cosiddetta *matematica ricreativa*, e non rivestono più grande rilevanza all'interno della ricerca matematica moderna.

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare all'amico **Paolo Desogus** che, lette le bozze quasi definitive del lavoro, lo ha *benevolmente criticato* sia indicandomi e sviste e lacune sia fornendomi ed osservazioni e consigli.

L'Autore sarà grato a tutti quelli che gli segnaleranno eventuali od *errori* od *imprecisioni* (sono graditi anche e *consigli* e *opinioni*).

Paololuigi Salimbeni via P. Cavaro, 73 09131 Cagliari
cellulare: +39 3493897629
e-mail: p.salimba@gmail.com

Questa ed altre dispense, sempre dello stesso Autore, nel sito di **Paolo Salimbeni** «http://www.paolosalimbeni.it»; vedi in: **Dispense**.

Dello stesso Autore, e nel medesimo sito, alcune presentazioni in ***PowerPoint***; vedi in: **Presentazioni**.

I quadrati magici

Costruzione e curiosità

Premessa

Un ***quadrato magico*** è una disposizione di numeri interi, all'interno di una griglia (o matrice) quadrata, in cui siano rispettate due condizioni: i valori siano tutti distinti tra loro, la somma dei numeri presenti ed in ogni riga ed in ogni colonna ed in entrambe le diagonali dia sempre lo stesso risultato; tale intero è denominato ***costante magica*** (o ***costante di magia*** o ***somma magica***) del quadrato, e qui verrà indicato con «$M_{(n)}$».

Sapendo che la comma di tutti i numeri naturali (interi) da «1» ad «n» è data dalla formula trovata dal matematico tedesco **Johann Friedrich Carl Gauss** (1777 – 1855):

$$S_{(n)} = 1 + 2 + \ldots + m-1 + m = \sum_{j=1}^{m} j = \frac{m \bullet (m+1)}{2}$$

La costante magica sarà data dalla:

$$M_{(n)} = \frac{1}{n} \bullet \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{n} \bullet \frac{n^2 \bullet (n^2+1)}{2} = \frac{n \bullet (n^2+1)}{2}$$

Per riempire un quadrato di ordine «n» servono «n^2» numeri interi distinti; nel caso in cui questi ultimi coincidano con gli interi da «1 a n^2», allora il quadrato è detto o ***normale*** o ***perfetto***; il numero o di righe o di colonne è detto ***ordine*** del *quadrato magico*, e verrà appunto indicato con «n».

Se si moltiplica la ***costante magica*** «$M_{(n)}$» per l'***ordine*** «n», nei *quadrati magici normali* si ottiene la somma «$S_{(n)}$» di tutti gli interi del quadrato da «1» a «n^2».

Somma dei numeri da «1 a n^2»: $S_{(n^2)} = M_{(n)} \bullet n$

Osservazioni

Nel caso sia «n = 5» sarà anche: «$n^2 = 25$», «$M_{(n)} = 65$», per cui:

$S_{(n^2)} = 65 \bullet 5 = 325 = 1 + 2 + \ldots + n^2\text{-}1 + n^2 = [25 \bullet (25 + 1)] / 2$

I quadrati magici normali, del tipo «$1 \div n^2$», possono essere costruiti per tutti i valori possibili di «n» tranne che per «n = 2».

«n = 1, $M_{(1)} = 1$», «n = 2, *non esiste*», «n = 3, $M_{(3)} = 15$», «n = 4, $M_{(4)} = 34$»,
«n = 5, $M_{(5)} = 65$», «n = 6, $M_{(6)} = 111$», «n = 7, $M_{(7)} = 175$», «n = 8, $M_{(8)} = 260$»,
«n = 9, $M_{(9)} = 369$», «n = 10, $M_{(10)} = 505$», e così via.

Non tutti i quadrati magici del tipo «$1 \div n^2$» sono, però, costruiti nello stesso modo; a tal fine, vengono suddivisi in tre diverse classificazioni:

«n» è un numero *dispari*
«n» è un numero *semplicemente pari* (cioè divisibile per 2, ma non per 4)
«n» è un numero *doppiamente pari* o *completamente pari* (divisibile anche per 4)

Curiosità

I quadrati magigi ebero, probabilmente, origine in Cina, al tempo della dinastia Shang, circa 4000 anni fa

Alcune proprietà dei quadrati magici

Se o aggiungiamo o sottraiamo una stessa quantità «x» a ciascun numero di un *quadrato magico*, otteniamo un'altro un *quadrato magico*; il *quadrato magico* a cui abbiamo o aggiunto o sottratto «x» a ciascun numero, avrà come costante magica o «$Mx_{(n)} = M_{(n)} + n \bullet x$» o «$Mx_{(n)} = M_{(n)} - n \bullet x$», rispettivamente.

Se moltiplichiamo ciascun numero di un *quadrato magico* per una stessa quantità «y», otterremo di nuovo un *quadrato magico*; il *quadrato magico* a cui abbiamo moltiplicato «y» a ciascun numero, ha come costante magica o «$My_{(n)} = M_{(n)} \bullet y$» o «$My_{(n)} = M_{(n)} / y$», rispettivamente.

Esistono quadrati magici che, elevando tutti i numeri contenuti al loro interno ad un esponente uguale ad un certo numero naturale «k», rimangono magici.

Se «k = 2» questi si chiamano ***quadrati bimagici***, se «k = 3» sono detti ***quadrati trimagici***, e così via; in generale questi *quadrati magici* sono detti ***quadrati multimagici***.

Ciascun quadrato magico rimarrebbe magico anche se ruotato o di 90° o di 180° o di 270°, oppure se venisse riflesso rispetto sia all'asse od orizzontale o verticale sia a ciascuna delle sue diagonali.

Quadrati magici normali di ordine dispari

Il primo metodo

Il più semplice *quadrato magico normale* di *ordine dispari* è quello formato da una griglia di soli «3 x 3», quindi con «n = 3»; ovviamente, «n = 1» non è stato considerato.

Il procedimento è spiegato chiaramente, penso, nei due schemi sia (**a**) sia (**b**).

Costante magica: $M_{(3)} = \frac{3 \bullet (3^2 + 1)}{2} = 15$

1) Alla griglia iniziale di (3 x 3) in giallo «$\mathbf{a}_1$», si aggiunge una casella ausiliaria indicata tratteggiata, nel punto medio di ogni lato.

2) iniziando, ad esempio, dalla casella ausiliaria sul lato sinistro segnandovi il numero «1» (essendo il primo numero della progressione aritmetica scelta «1 ÷ 9»), si prosegue diagonalmente nelle caselle segnando successivamente i numeri della nostra serie fino ad segnare il «3» nella casella ausiliaria sul lato superiore.

Osservazioni

Si può iniziare da una qualsiasi delle caselle ausiliarie, indicate tratteggiate, procedendo diagonalmente, nella successione, fino ad arrivare alla casella ausiliaria su uno dei lati adiacenti.

3) Si prosegue nella diagonale adiacente iniziando, nel nostro esempio, dalla casella in basso a sinistra nella grigia (3 x 3) in giallo, segnando i numeri: «4», «5», «6».

Osservazioni

Le diagonali indicate in **verde** con segno a ***punto e linea*** non devono essere considerate come diagonali adiacenti; un indizio per riconoscerle è che hanno un numero di caselle differenti: due anziché tre.

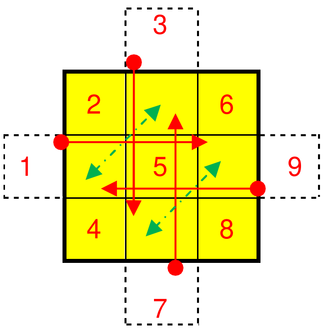
4) Si prosegue ancora nella diagonale adiacente iniziando, sempre nel nostro esempio, dalla casella ausiliaria più in basso sul lato inferiore, segnando i numeri: «7», «8», «9».

5) Si sposta l'«1», presente nella casella ausiliaria sul lato sinistro della griglia, nella casella della colonna più a destra fra il «6» ed il «7», si sposta il «3», presente nella casella ausiliaria sul lato superiore della griglia, nella casella della riga inferiore fra il «4» ed il «8», si sposta il «9», presente nella casella ausiliaria sul lato destro della griglia, nella casella della riga più a destra fra il «2» ed il «4», si sposta il «7», presente nella casella ausiliaria sul lato inferiore della griglia, nella casella della riga superiore fra il «2» ed il «6».

Osservazioni

Gli spostamenti sono visualizzati dalle frecce (indicate in rosso).

$\mathbf{a}_1$



b

			15
2	7	6	15
9	5	1	15
4	3	8	15
15	15	15	15

b) rappresenta, infine, la soluzione.

Lo stesso procedimento, forse solo leggermente più complicato, lo si può utilizzare per costruire *quadrati magici normali* di qualsiasi *ordine dispari*, ad esempio con «n = 5».

Costante magica: $M_{(3)} = \frac{5 \bullet (5^2 + 1)}{2} = 65$

1) Alla griglia iniziale di (5 x 5) in giallo «$\mathbf{a}_2$», si aggiunge una serie di caselle ausiliarie indicate tratteggiate, nel punto medio di ogni lato; si aggiungono delle strisce di caselle riducendo, ogni volta, il loro numero di due, fino a che resta un'unica casella.

Osservazioni

Nella schema «**a**» si vede come in ogni lato della griglia (5 x 5) si è prima aggiunta una striscia di tre caselle (5 – 2 = 3) e, poi, una striscia composta soltanto di una casella (3 – 2 = 1).

2) Iniziando, ad esempio, dall'unica casella ausiliaria della prima striscia del lato sinistro, segnandovi il numero «1» (essendo il primo numero della progressione aritmetica scelta «1 ÷ 25») e si prosegue diagonalmente nelle caselle segnando successivamente i numeri della nostra serie fino ad segnare il «5» nell'unica casella ausiliaria dell'ultina striscia sul lato superiore.

Osservazioni

Si può iniziare da una qualsiasi delle caselle ausiliarie situate in una delle fascie contenenti una sola casella, indicate tratteggiate, procedendo diagonalmente, nella successione, fino ad arrivare alla casella ausiliaria con le stesse caratteristiche, situata su uno dei lati adiacenti.

3) Si prosegue nella diagonale adiacente iniziando, nel nostro esempio, dalla casella più in basso della striscia di tre caselle ausiliarie del lato sinistro della grigia (5 x 5) in giallo, segnando i numeri: «6», «7», «8», «9», «10».

Osservazioni

La diagonale indicata in verde con segno a ***punto e linea*** non deve essere considerata come diagonale adiacente; un indizio per riconoscerla è che ha un numero di caselle differenti: quattro anziché cinque; le altre diagonali da non considerare non le ho indicate, ma ora il lettore è in grado di individuarle.

4) Si prosegue ancora nella diagonale adiacente iniziando, nel nostro esempio, dalla casella in basso a sinistra nella grigia (5 x 5) in giallo, segnando i numeri: «11», «12», «13», «14», «15».

5) Proseguiamo sempre nella diagonale adiacente ed ancora in quella adiacente successiva fino a completare le due rimanenti diagonali ed a segnare il numero «25».

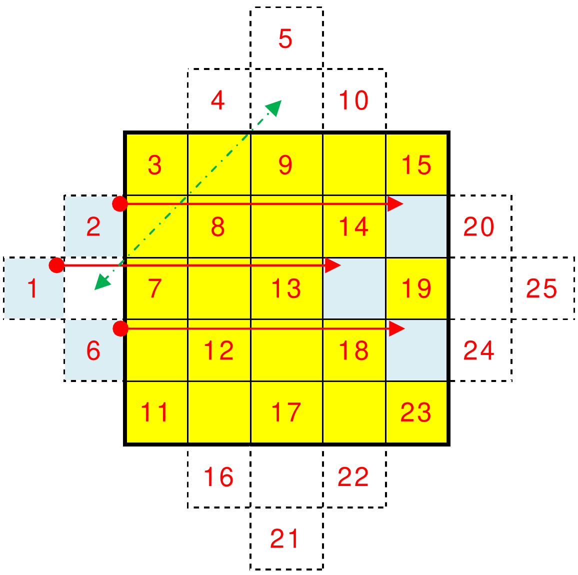
6) Si sposta il «2», presente nella casella ausiliaria sul lato sinistro della griglia, nella casella della colonna più a destra fra il «15» ed il «19», si sposta l'«1», presente nell'unica casella ausiliaria della striscia sul lato sinistro della griglia, nella casella sulla stessa riga fra il «14» ed il «18», si sposta il «6», presente nella casella ausiliaria sul lato sinistro della griglia, nella casella sulla stessa riga fra il «19» ed il «23».

Osservazioni

È come se tu traslassi orizzontalmente le caselle ausiliarie, indicate in azzurro, mantenendone invariata la disposizione, fino a giungere sul lato opposto della griglia.

7) Lo stesso procedimento si applica alle terne e «4 – 5 – 10» e «20 – 25 – 24» e «16 – 21 – 22» che vengono traslate nelle corrispondenti caselle del lato opposto della griglia; nello schema «**a_2**» questi ultimi spostamenti non sono stati indicati.

a_2



b) rappresenta, infine, la soluzione.

b

					65
3	16	9	22	15	65
20	8	21	14	2	65
7	25	13	1	19	65
24	12	5	18	6	65
11	4	17	10	23	65
					65
65	65	65	65	65	

Il secondo metodo: Siamese

Il ***metodo siamese***, o ***metodo di* De la Loubère**, è un semplice metodo per costruire qualsiasi quadrato magico di ordine «n» dispari ideato nel 1688 dal e matematico e diplomatico francese **Simon de la Loubère** (1642 – 1729).

Il **Loubère** scrisse: «*Spero che non sarà inaccettabile che io dia le regole e la dimostrazione di questo metodo, che è sorprendente per la sua estrema facilità di eseguire una cosa, che è apparsa difficile ai nostri Matematici*»

Partendo dalla casella centrale della prima riga con il numero «1» (o il primo numero di una qualsiasi progressione aritmetica scelta), il movimento fondamentale per riempire le varie caselle è: «**su e a destra, in diagonale** (↗)», un passo alla volta.

Quando, con un movimento, si uscisse dal quadrato, si deve riprendere o dalla prima colonna o dalla prima riga; se una casella dovesse essere già occupata, si deve andare a riempire la casella immediatamente sottostante a quella appena riempita (vedere le immagini per maggior chiarezza).

Costante magica: $M_{(3)} = \frac{3 \bullet (3^2 + 1)}{2} = 15$

a) Si segna nella casella centrale della prima fila superioe il numeru «1» (essendo il primo numero della progressione aritmetica scelta «1 ÷ 9»).

b) Procedendo ***su e a destra, in diagonale*** (↗) si segna il «2» che però esce dalla griglia; si riprende, pertanto, dalla riga più in basso, sulla stessa colonna.

c) Procedendo sempre allo stesso modo si segna il «3» che però esce dalla griglia; si riprende, pertanto, dalla colonna più a sinistra, sulla stessa riga.

d) Procedendo sempre allo stesso modo si dovrebbe segnare il «4», ma la casella è già occupata dall'«1»; si prosegue, pertanto. segnando il «4» nella casella immediatamente sotto il «3».

a

		2	
	1		

b

		2	
	1		
			3
		2	

c

		2	
	1		
3			3
		2	

d

		2	
	1		
3			3
4		2	

e) Procedendo ancora, si segna il «7» che però esce dalla griglia; questa casella esce completamente dalla griglia per cui si considera come se fosse una casella già occupata.

f) Si riprende, pertanto, segnando il «7» nella casella immediatamente sotto il «6».

g) Procedendo ancora, si segna l'«8» che però esce dalla griglia; si riprende, pertanto, dalla colonna più a sinistra, sulla stessa riga.

h) Proseguendo ancora, si segna il «9» che però esce dalla griglia; si riprende, pertanto, dalla riga più in basso, sulla stessa colonna.

e

		2	7
	1	6	
3	5		3
4		2	

f

		2	7
	1	6	
3	5	7	3
4		2	

g

		2	7
8	1	6	8
3	5	7	3
4		2	

h

	9	2	7
8	1	6	8
3	5	7	3
4	9	2	

o) rappresenta, infine, la soluzione.

o

			15
8	1	6	15
3	5	7	15
4	9	2	15
			15
15	15	15	

Un primo esempio

Per un *quadrato magico* di ordine superiore a «n = 3», ad esempio di ordine «n = 5», il procedimento si complica leggermente, ma rimane sostanzialmente il medesimo.

Costante magica: $M_{(3)} = \frac{5 \bullet (5^2 + 1)}{2} = 65$

a) Si segna nella casella centrale della prima fila superiore il numeru «1» (essendo il primo numero della progressione aritmetica scelta «1 ÷ 25»).

Costatato che con ***e su e a destra, in diagonale*** (↗) si uscirebbe dalla griglia col «**2**», si continua dalla riga più in basso nella medesima colonna.

b) Dopo il «3», col «**4**» si uscirebbe dalla griglia e, pertanto, si riprende dalla colonna più a destra nella medesima riga.

c) La casella e *su e a destra, in diagonale* (↗) è già occupatta dall'uno «1», per cui si prosegue dalla casella immediatamente sottostante il «5».

a

			2		
		1			

b

			2		
		1			
					4
				3	
			2		

c

			2		
		1			
	5				
4					4
				3	
			2		

d) Dopo l'«8», col «**9**» si uscirebbe dalla griglia e, pertanto, si riprende dalla riga più in basso nella medesima colonna.

e) Dopo il «9», col «**10**» si uscirebbe dalla griglia e, pertanto, si riprende dalla colonna più a sinistra nella medesima riga.

f) La casella e *su e a destra, in diagonale* (↗) è già occupatta dal «6» per cui si prosegue dalla casella immediatamente sottostante il «10».

d

			2	9	
		1	8		
	5	7			
4	6				4
				3	
			2		

e

			2	9	
		1	8		
	5	7			
4	6				4
				3	10
			2	9	

f

			2	9	
		1	8		
	5	7			
4	6				4
10				3	10
			2		

g) Dopo il «15», col «**16**» si dovrebbe segnare il «16» che però esce dalla griglia; questa casella esce completamente dalla griglia per cui si considera come se fosse una casella già occupata e, pertanto si prosegue dalla casella immediatamente sotto il «15».

h) Dopo il «16», col «**17**» si uscirebbe dalla griglia e, pertanto, si riprende dalla colonna più a sinistra nella medesima riga.

g

			2	9	16
		1	8	15	
	5	7	14	16	
4	6	13			4
10	12			3	10
11			2		

h

			2	9	16
		1	8	15	17
	5	7	14	16	
4	6	13			4
10	12			3	10
11			2	9	

i

	18		2	9	16
17		1	8	15	17
	5	7	14	16	
4	6	13		22	4
10	12		21	3	10
11			2	9	

i) Dopo il «17», col «**18**» si uscirebbe dalla griglia e, pertanto, si riprende dalla riga più in basso nella medesima colonna.

l) La casella e *su e a destra, in diagonale* (↗) è già occupatta dal «16» per cui si prosegue dalla casella immediatamente sottostante il «20».

m) Dopo il «22», col «**23**» si uscirebbe dalla griglia e, pertanto, si riprende dalla colonna più a sinistra nella medesima riga.

n) Dopo il «24», col «**25**» si uscirebbe dalla griglia e, pertanto, si riprende dalla riga più in basso nella medesima colonna.

l

	18		**2**	**9**	**16**
17		1	8	15	**17**
	5	7	14	16	
4	6	13	**20**		**4**
10	12	**19**		3	**10**
11	**18**		2	9	

m

	18		**2**	**9**	**16**
17		1	8	15	**17**
	5	7	14	16	**23**
4	6	13	20	**22**	**4**
10	12	19	**21**	3	**10**
11	18		2	9	

n

	18	**25**	**2**	**9**	**16**
17	**24**	1	8	15	**17**
23	5	7	14	16	**23**
4	6	13	20	22	**4**
10	12	19	21	3	**10**
11	18		2	9	

o) Si inserisce, infine, il numero «25».

o

	18	**25**	**2**	**9**	**16**
17	24	1	8	15	**17**
23	5	7	14	16	**23**
4	6	13	20	22	**4**
10	12	19	21	3	**10**
11	18	**25**	2	9	

P

					65
17	**24**	**1**	**8**	**15**	**65**
23	**5**	**7**	**14**	**16**	**65**
4	**6**	**13**	**20**	**22**	**65**
10	**12**	**19**	**21**	**3**	**65**
11	**18**	**25**	**2**	**9**	**65**
					65
65	**65**	**65**	**65**	**65**	

P) rappresenta, infine, la soluzione

Il terzo metodo: a salto di cavallo

Nel **metodo *a salto di cavallo***, la disposizione dei numeri, all'interno della griglia, è ottenuta in modo che per andare da un qualsiasi numero al successivo si debba seguire un movimento simile a quello che può eseguire il cavallo nel gioco degli scacchi: in questo procedimento, però, ci si sposta e sempre e soltanto di due caselle verso l'alto e poi ortogonalmente di una casella verso destra.

Quando si esce dalla griglia o quando si dovrebbe arrivare ad una casella già occupata ci si dovrà comportare come ci si comporta in: **Il secondo metodo**.

Non può essere utilizzato per costruire quadrati magici di modulo «n ≤ 3».

Costante magica: $M_{(3)} = \frac{5 \bullet (5^2 + 1)}{2} = 65$

a) Si segna nella casella centrale della colonna più a destra il numero «1» (essendo il primo numero della progressione aritmetica da noi scelta «1 ÷ 25») e si prosegue, *a salto di cavallo*, fino ad arrivare a collocare il «**3**» che, però, esce dalla griglia nella riga superiore del *fuori-griglia*.

Osservazioni

Tutte le mosse avvengono sempre col metodo ***a salto di cavallo***, per cui questa particolarità non verrà più evidenziata.

b) Si prosegue, pertanto, dalla penultima riga più in basso nella medesima colonna; continuando fino a collocare il «**5**» che, però, esce dalla griglia.

c) Si prosegue, pertanto, dall'ultima riga più in basso nella medesima colonna; continuando fino a collocare il «**6**» che, però, esce dalla griglia.

a

		3			
	2				
1					

b

		3			
				5	
	2				
			4		
1					6
		3			

c

		3			
				5	
	2				
			4		
1					6
		3			
				5	

d) Si dovrebbe iniziare, pertanto, dalla casella sulla colonna più a destra nella stessa riga, ma questa è già occupatta dall'«1» per cui si dovrebbe prosegue dalla casella immediatamente sottostante il «5».

Sotto il «5», però, non vi è alcuna casella per cui si deve proseguire dalla riga più in alto sulla stessa colonna.

Si arriva a collocare il «**7**» che, però, e fuori griglia, nella griglia superiore del *fuorigriglia*.

e) Si colloca il «7» nella casella della colonna più a destra nella penultima riga; si prosegue ancora fino a collocare il «**9**» che, però, e fuori griglia, nella griglia inferiore del *fuorigriglia*.

f) Si segna il «9» nella casella dell'ultima riga nella stessa colonna e si prosegue fino a dover segnare l'«11», ma la casella è già occupata dal «6».

d

		3			7
				5	
	2			6	
			4		
1					6
		3			
				5	

e

		3			7
		9		5	
	2			6	
	8		4	12	
1			10		6
7		3	11		
				5	

f

		3			7
		9		5	
	2			6	
	8		4		
1			10		6
		3			
		9		5	

g) Si segna, pertanto, l'«11» nella casella immediatamente sotto il «10» e si prosegue fino a collocare il «**13**» che, però, è fuori griglia nella griglia inferiore del *fuori-griglia*..

h) Si segna, pertanto, il «13» nella casella della colonna più a destra nell'ultima riga e si prosegue fino a collocare il «**16**» che, però, è fuori griglia nella riga superiore del fuori-griglia.

Il «16» dovrebbe essere collocato nella casella della penultima riga nella stessa colonna, ma questa casella è già occupata dall'«11».

i) Si segna, pertanto, il «16» nella casella immediatamente sotto il «15» e si prosegue fino a collocare il «**17**» che, però, è fuori griglia nella riga inferiore del *fuori-griglia*.

l) Si segna, pertanto, il «17» nella casella dell'ultima riga nella stessa colonna e si prosegue fino a collocare il «**19**» che, però, è fuori griglia nella riga superiore del *fuori-friglia*.

m) Si segna, pertanto, il «19» nella casella della colonna più a sinistra nella stessa riga e si prosegue fino a collocase il «**20**» che, però, e fuori griglia nella riga superiore del *fuori-griglia*.

g

		3			7
		9		5	13
	2			6	
	8		4	12	
1			10		6
7		3	11		
		9		5	

h

		3	16		7
		9		5	
	2	15		6	
	8		4		
1	14		10	18	6
7		3	11		
13		9		5	

i

		3	16		7
		9	17	5	
	2	15		6	
	8	16	4	12	
1	14		10		6
7		3	11		
13		9		5	

n) Si segna, pertanto, il «20» nella casella della penultima righa nella medesima colonna e si prosegue fino a segnare il «21», ma la casella è già occupata da «16».

l

		3	16		7
		9	17	5	13
	2	15		6	19
	8		4	12	
1	14		10	18	
7		3	11		
13		9	17	5	

m

	20	3	16		7
		9	17	5	
19	2	15		6	19
	8	16	4		
1	14		10	18	
7		3			
13		9	17	5	

n

	20	3	16		7
		9	17	5	13
19	2	15		6	19
	8	16	4	12	
1	14		10	18	
7	20	3	11		
13		9	17	5	

o) Si segna, pertanto, il «21» nella casella immediatamente sotto il «20» e si prosegue fino a segnare il «**24**» che, però, e fuori griglia nella riga superiore del *fuori-griglia*.

p) Si segna, pertanto, il «24» nella penultima riga nella stessa colonna e si prosegue fino a collocare il «**25**» che, però è fuori griglia.

q) Si segna, pertanto, il «25» nella casella della colonna più a sinistra nella stessa riga e si termina il procedimento.

o

	20	3	16	24	7
		9	17	5	13
19	2	15	23	6	19
	8	16	4	12	
1	14	22	10	18	
7	20	3	11		
13	21	9	17	5	

p

	20	3	16	24	7
		9	17	5	13
19	2	15	23	6	19
	8	16	4	12	25
1	14	22	10	18	
7	20	3	11	24	
13	21	9	17	5	

q

	20	3	16	24	7
		9	17	5	13
19	2	15	23	6	19
25	8	16	4	12	25
1	14	22	10	18	
7	20	3	11	24	
13	21	9	17	5	

r) Si rappresenta, infine, la soluzione, ma nella pagina successiva.

r

					65
19	2	15	23	6	65
25	8	16	4	12	65
1	14	22	10	18	65
7	20	3	11	24	65
13	21	9	17	5	65
					65
65	65	65	65	65	

Un altro esempio

Presentiamo, ora, un quadrato magico di ordine «n = 7», costruito col metodo ***a salto di cavallo***, senza però indicare tutti i passaggi.

Costante magica: $M_{(7)} = \frac{7 \bullet (7^2 + 1)}{2} = 175$

	34	44	12	29	39	7	17	175
	42	3	20	30	47	15	25	
33	43	11	28	38	6	16	33	175
41	2	19	29	46	14	24	41	175
49	10	27	37	5	15	32	49	175
1	18	35	45	13	23	40	8	175
9	26	36	4	21	31	48	9	175
17	34	44	12	22	39	7		175
25	42	3	20	30	47	8		175
175	175	175	175	175	175	175		
							175	

Il quarto metodo: a disposizione obliqua

Nel ***quarto metodo***, la disposizione dei numeri, all'interno della griglia, è ottenuta con un procedimento che ricorda un poco quello del secondo metodo.

Prendiamo un *quadrato magico* di ordine «n = 5».

Costante magica: $M_{(3)} = \frac{5 \bullet (5^2 + 1)}{2} = 65$

Seguiamo il procedimento, passo passo.

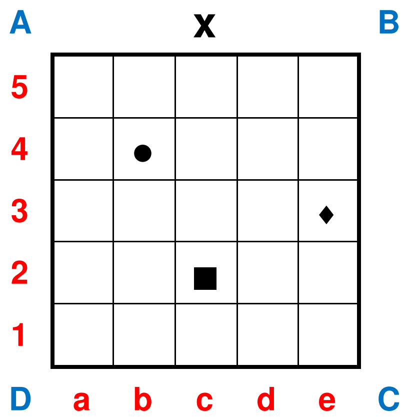
Innanzi tutto iniziamo col disegnare una griglia (5 x 5) e adottiamo alcune convenzioni.

Per indicare la posizione di ogni casella, utilizziamo una convenzione simile a quella degli scacchi:

Indichiamo con «a, b, c, d, e» le caselle della «1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a» colonna iniziando da destra, con «1, 2, 3, 4, 5» le caselle della «1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a» riga iniziando dal basso.

Chiamiamo *diagonale ascendente* la diagonale lungo il verso «D B», *diagonale discendente* la diagonale lungo il verso «A C».

La casella «•» è la «b4», la casella «■» è la «c2», la casella «♦» è la «e3»



Costruiamo, poi, attorno alla nostra *griglia principale*, altre quattro *griglie secondarie*: «α», «β», «γ», «δ» uguali alla prima, disposte come nel diagramma «**a**» e indicate in verde.

Osservazioni

Il lettore attento si sarà accorto che le griglie e «α» e «β» e «δ» non sono né uguali alla principale né quadrate; il motivo è che per guadagnare spazio la parte di queste griglie non utilizzata è stata rimossa.

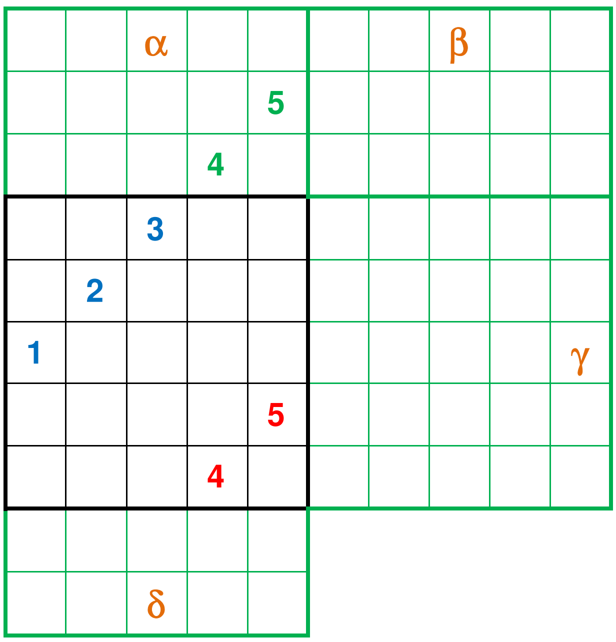
a) Collochiamo l'«**1**» in una casella e proseguiamo lungo la diagonale ascendente, continuiamo anche fuori della griglia principale fino a fermarci al limite destro della griglia «α» col «5».

Riportiamo i numeri «4», «5», collocati nelle caselle e «**d1**» e «**e2**» della griglia «α» nelle corrispondenti caselle della griglia principale.

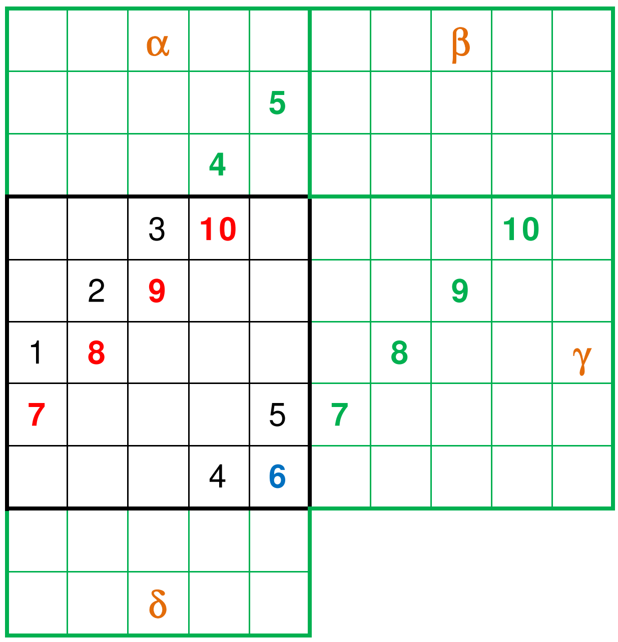
b) Collochiamo il «6» nella casella immediatamente sotto quella che contiene il «5» e proseguiamo lungo la diagonale ascendente, continuiamo anche fuori della griglia principale fino a fermarci al limite superiore della griglia «β» col «10».

Riportiamo i numeri «7», «8», «9», «10», collocati nelle caselle e «**a2**» e «**b3**» e «**c4**» e «**d5**» della griglia «γ» nelle corrispondenti caselle della griglia principale.

a



b



c) Collochiamo l'«11» nella casella immediatamente sotto quella che contiene il «10», perché la casella «d5» è al limite superiore della glriglia principale, e proseguiamo lungo la diagonale ascendente, continuiamo anche fuori della griglia principale, ma non arriviamo al limite superiore della griglia «β»; ci fermiamo prima della casella «c4» della griglia «β» perché la casella «c4» della griglia principale è già occupata dall'«**11**».

Riportiamo i numeri «13», «14», «15», collocati nelle caselle e «**a1**» e «**b2**» e «**c3**» della griglia «γ» nelle corrispondenti caselle della griglia principale.

d) Collochiamo il «16» nella casella immediatamente sotto quella che contiene il «15», perché la casella immediatamente seguente nella stessa diagonale ascendente è già occupata dall'«11», e proseguiamo lungo la diagonale ascendente, continuiamo anche fuori della griglia principale, fino a fermarci al limite superiore della griglia «γ» col «19».

Riportiamo il numero «19» collocato nella casella «**a5**» della griglia «γ» nelle corrispondenti caselle della griglia principale.

c

		α					β		
							15		
				5		14			
			4		13				
		3	10	12				10	
	2	9	11				9		
1	8	15				8			γ
7	14			5	7				
13			4	6					
		δ							

d

		α					β		
				5					
			4						
19		3	10	12	19			10	
	2	9	11	18			9		
1	8	15	17			8			γ
7	14	16		5	7				
13			4	6					
		δ							

e) Proseguiamo lungo la diagonale ascendente, continuiamo anche fuori della griglia principale, ma non arriviamo al limite superiore della griglia «α»; ci fermiamo prima della casella «c2» della griglia «α» perché la casella «c2» della griglia principale è già occupata dal «16».

Riportiamo il numero «20», collocato nella casella «**b1**» della griglia «γ» nelle corrispondenti caselle della griglia principale.

e

		α					β		
							15		
				5		14			
	20		4		13				
19		3	10	12	19			10	
	2	9	11	18			9		
1	8	15	17			8			γ
7	14	16		5	7				
13	20		4	6					
		δ							

f

		α					β		
							15		
				5		14			
	20		4		13				
19	21	3	10	12	19			10	
	2	9	11	18			9		
1	8	15	17			8			γ
7	14	16		5	7				
13	20		4	6					
	21								
		δ							

f) Dovremmo collocare il «21» immediatamente sotto il «20», ma così facendo usciamo fuori dalla griglia principale entrando nella griglia «δ» nella posizione «b5» (ricordiamo che della griglia «δ» sono visualizzate soltanto le righe e «4» e «5».

Riportiamo il numero «21», collocato nella casella «**b5**» della griglia «δ» nelle corrispondenti caselle della griglia principale.

g) Proseguiamo lungo la diagonale ascendente, continuiamo anche fuori della griglia principale, ma non arriviamo al limite superiore della griglia «α»; ci fermiamo prima perché la casella «**d2**» della griglia «α» è già occupata dal «23».

Riportiamo il numero «22», collocato nella casella «**d2**» della griglia «α» nella corrispondente casella della griglia principale e proseguiamo lungo la diagonale ascendente, continuando anche fuori della griglia principale, fino ad arrivare al numero «25», ultimo numero della serie «1 ÷ 25».

h) Riportiamo il numero «25», collocato nella casella «**d2**» della griglia «γ» nella corrispondente casella della griglia principale e completiamo il quadrato magico normale.

g

		α					β		
				24			15		
			23	5		14			
	20	22	4		13				
19	21	3	10	12	19			10	
	2	9	11	18	25		9		
1	8	15	17	24		8			γ
7	14	16	23	5	7				
13	20	22	4	6					
	21								
		δ							

h

		α					β		
							15		
				5		14			
	20	22	4		13				
19	21	3	10	12	19			10	
25	2	9	11	18	25		9		
1	8	15	17	24		8			γ
7	14	16	23	5	7				
13	20	22	4	6					
		δ							

i) Si rappresenta, infine, la soluzione.

i

					65
19	21	3	10	12	65
25	2	9	11	18	65
1	8	15	17	24	65
7	14	16	23	5	65
13	20	22	4	6	65
					65
65	65	65	65	65	

Questa costruzione è valida se si posiziona l'«1», od il primo numero della serie che andrà ad occupare le caselle della griglia principale, nella casella «a3».

Naturalmente resta valida la rotazione e di 90° e di 180° e di 270° per cui può essere costruito posizionando l'«1» anche e nelle caselle o «c5» o «e3» o «c1».

Alcune varianti

Negli schemi e «**x**» e «**y**» sono rappresentati due *quadrati magici* nei quali la serie di numeri considerata non è da «1 ÷ 25», come nel *quadrato magico normale* rappresentato nello schema «**i**», ma è differente.

In questo caso la costante magica sarà:

$$M_{a\text{-}1(n)} = \frac{n\,(n^2-1)}{2} + (a-1) \bullet n$$

In cui: «n» è l'ordine del quadrato magico - «a» è il primo numero della serie.

Nel *quadrato magico normale* «**x**» la serie è «5 ÷ 29», per cui:

$$M_{5\ 29(n)} = \frac{n\,(n^2-1)}{2} + (5-1) \bullet n = 65 + 4 \bullet 5 = 65 + 20 = 85$$

Nel *quadrato magico normale* «**y**» la serie è «-3 ÷ 21», per cui:

$$M_{-3\ 21(n)} = \frac{n\,(n^2-1)}{2} + (-3-1) \bullet n = 65 + (-4) \bullet 5 = 65 + (-20) = 45$$

x — 85

23	25	7	14	16	85
29	6	13	15	22	85
5	12	19	21	28	85
11	18	20	27	9	85
17	24	26	8	10	85
85	85	85	85	85	85

y — 45

15	17	-1	6	8	45
21	-2	5	7	14	45
-3	4	11	13	20	45
3	10	12	19	1	45
9	16	18	0	2	45
45	45	45	45	45	45

Naturalmente, anche questi *quadrati magigi*: «**i**», «**x**», «**y**», rimarrebbero magici anche se ruotati o di 90° o di 180° o di 270°, oppure se venissero riflessi rispetto sia all'asse od orizzontale o verticale sia a ciascuna delle due loro diagonali.

Quadrati magici normali di ordine semplicemente pari

Premessa

Il più semplice *quadrato magico* di *ordine semplicemente pari* è di ordine «n = 6»; il quadrato magico con una griglia (4 x 4) è di ordine *doppiamente pari*.

Costante magica: $M_{(6)} = \frac{6 \bullet (6^2+1)}{2} = 111$

Il primo metodo

a) Si considera una griglia di (6 x 6).

b) Si divide la griglia (6 x 6) in quattro *sotto-quadranti* (3 x 3); supponiamo di chiamare e «**A**» quello in alto a sinistra e «**C**» quello in alto a destra e «**D**» quello in basso a sinistra e «**B**» l'ultimo in basso a destra.

a

b

A	**C**
D	**B**

A-B-C-D) Si assegna a ogni *sotto-quadrante* un intervallo di numeri pari a un quarto della quantità totale di caselle del quadrato magico assegnato.

Esempio: con una griglia (6 x 6), al *sotto-quadrante* «**A**» dovrebbero essere assegnati i numeri nell'intervallo «1 ÷ 9», al «**B**» quelli nell'intervallo «10 ÷ 18», al «**C**» quelli nell'intervallo «19 ÷ 27», al «**D**» quelli nell'intervallo «28 ÷ 36».

Costruisci, all'interno di ogni *sotto-quadrante*, un *quadrato magico* come è indicato in *Quadrati magici normali di ordine dispari* – **Un secondo metodo**.

Si dovrà iniziare nel *sotto-quadrante* «**A**» con il numero «1», proprio come spiegato prima; nel *sotto-quadrante* «**B**» con il numero «10», nel *sotto-quadrante* «**c**» con il numero «19», nel *sotto-quadrante* «**D**» con il numero «28»

- Si considera il primo numero di ogni *sotto-quadrante* come se fosse il numero uno, inserendolo nella casella centrale della riga in alto.
- Si tratta ogni *sotto-quadrante* come se fosse un *quadrato magico normale* a sé stante con una differente intervallo della serie di numeri naturali.

A — **1 ÷ 9**

8	1	6
3	5	7
4	9	2

B — **10 ÷ 18**

17	10	15
12	14	16
13	18	11

C — **19 ÷ 27**

26	19	24
21	23	25
22	27	20

D — **28 ÷ 36**

35	28	33
30	32	34
31	36	29

x) Ricomponi i sotto-quadranti come indicato nello schema «**b**».

Esegui uno scambio uno a uno; sostituisci semplicemente i valori evidenziati nelle caselle appartenenti ai *sotto-quadranti* e «A» e «D» senza modificarne l'ordine relativo.

Si devono scambiare: l'«**8**» col «**35**», il «**5**» col «**32**», il «**4**» col «**31**».

Una volta fatto questo, tutte le righe, le colonne e le diagonali del tuo *quadrato magico normale*, dovrebbero fornire la costante magica $M_{(6)}$ calcolata precedentemente.

Per non spezzare la griglia dei successivi due schemi e «**x**» e «**y**», sono passato direttamente alla pagina seguente.

x

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

y

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

z) Si rappresenta, infine, la soluzione.

z 111

35	**1**	**6**	**26**	**19**	**24**	**111**
3	**32**	**7**	**21**	**23**	**25**	**111**
31	**9**	**2**	**22**	**27**	**20**	**111**
8	**28**	**33**	**17**	**10**	**15**	**111**
30	**5**	**34**	**12**	**14**	**16**	**111**
4	**36**	**29**	**13**	**18**	**11**	**111**
111	**111**	**111**	**111**	**111**	**111**	**111**

Dalla costatazione che in una eventuale versione stampata in scala di grigi i vari colori sono difficilmente distinguibili poiché hanno quasi la stessa intensità, si è ritenuto opportuno, per renderli più riconoscibil, di abbinarvi un segno grafico.

Nello schema «y», i numeri in ***verde*** hanno una sottolineatura singola «**N**», i numeri in ***rosso*** hanno una sottolineatura doppia «**N**», i numeri in ***azzurro*** hanno una sottolineatura irregolare «**N**».

Così sarà anche e negli schemi sia «**a**» sia «**b**» in **Il primo metodo**, a pagina 20, e per **La Melencolia I**, a pagina 26, e per **Il quadrato magico di Subirachs**, a pagina 27; in questi ultimi due casi, i numeri in ***marrone*** hanno una sottolineatura a puntini «**N**».

Il secondo metodo: di Strachey

Il ***metodo*** **Strachey** per i *quadrati magici* è un algoritmo per la creazione di quadrati magici di ordine singolarmente pari di ordine «n = 4 • k + 2»; il quadrato magico che andiamo a presentare è di ordine «n = 10» per cui è «k = 2», infatti:

$$k = \frac{n-2}{4} = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{2} = 2$$

Il *quadrato magico normale* di ordine n = 10

Costante magica: $M_{(10)} = \dfrac{10 \bullet (10^2+1)}{2} = 505$

Si inizia con un procedimento molto simile a quello utilizzato in **Il primo metodo**, a pagina 15.

a) Si considera una griglia di (10 x 10).

b) Si divide la griglia (10 x 10) in quattro *sotto-quadranti* (5 x 5); supponiamo di chiamare e «**A**» quello in alto a sinistra e «**C**» quello in alto a destra e «**D**» quello in basso a sinistra e «**B**» l'ultimo in basso a destra; vedi i due schemi ed «**a**» e «**b**», a pagina 15.

Ogni *sotto-quadrante* conterrà «$^{n^2}/_4$» numeri, e precisamente:
Il *sotto-quadrante* «**A**» conterrà i numeri nell'intervallo «$1 \div {}^{n^2}/_4$»
Il *sotto-quadrante* «**B**» conterrà i numeri nell'intervallo «$^{n^2}/_4 + 1 \div {}^{2 \bullet n^2}/_4$»
Il *sotto-quadrante* «**C**» conterrà i numeri nell'intervallo «$^{2 \bullet n^2}/_4 + 1 \div {}^{3 \bullet n^2}/_4$»
Il *sotto-quadrante* «**D**» conterrà i numeri nell'intervallo «$^{3 \bullet n^2}/_4 \div n^2$»

All'interno di ogni *sotto-quadrante*, e «**A**» e «**B**» e «**C**» e «**D**», viene costruito un *quadrato magico*, di ordine «n = 5», in questo caso col metodo indicato in **Il secondo metodo: Siamese**, a pagina 5.

A

1 ÷ 25

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

B

26 ÷ 50

42	49	26	33	40
48	30	32	39	41
29	31	38	45	47
35	37	44	46	28
36	43	50	27	34

C

51 ÷ 75

67	74	51	58	65
73	55	57	64	66
54	56	63	70	72
60	62	69	71	53
61	68	75	52	59

D

76 ÷ 100

92	99	76	83	90
98	80	82	89	91
79	81	88	95	97
85	87	94	96	78
86	93	100	77	84

I *sotto-quadranti* vengono, infine, disposti come indicato nello schema «**b**», a pagina 15, in modo da ottenere una griglia di (10 x 10) nella quale sono presenti tutti i numeri dall'«1» al «n^2», quindi dall'«1» al «100».

Esecuzione

c) Scambiare le prime «k» colonne di estrema sinistra del *sotto-quadrante* «**A**» con le corrispondenti colonne del *sotto-quadrante* «**D**»; scambiare le «k - 1» colonne di estrema destra del *sotto-quadrante* «**C**» con le corrispondenti colonne del *sotto-quadrante* «**B**».
Ricordiamoci che, in questo esempio, «k = 2».

Scambiare le due colonne del *sotto-quadrante* «**A**».	**17**	**24**	Con le due colonne del *sotto-quadrante* «**D**».	**92**	**99**
	23	**5**		**98**	**80**
	4	**6**		**79**	**81**
	10	**12**		**85**	**87**
	11	**18**		**86**	**93**

Scambiare la colonna del *sotto-quadrante* «**C**».	**65**	Con la colonna del *sotto-quadrante* «**B**».	**40**
	66		**41**
	72		**47**
	53		**28**
	59		**34**

d) Scambiare il numero centrale della colonna di estrema sinistra del *sotto-quadrante* «A» (il numero «**79**») con il numero corrispondente del *sotto-quadrante* «**D**» (il numero «**4**»); scambiare il numero centrale del *sotto-quadrante* «**A**» (il numero «**13**») con il numero corrispondente del *sotto-quadrante* «**D**» (il numero «**88**»).

c

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

d

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
79	81	13	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
4	6	88	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

e) Si rappresenta, infine, la soluzione; un *quadrato magico normale* di ordine «n = 10» col una costante magica pari a:

$$M_{(10)} = \frac{10 \bullet (10^2 + 1)}{2} = 505$$

e

										505
92	99	1	8	15	67	74	51	58	40	505
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41	505
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47	505
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28	505
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34	505
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65	505
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66	505
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72	505
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53	505
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59	505
505	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505

Quadrati magici normali di ordine doppiamente pari

Premessa

Il più semplice quadrato magico normale è quello di ordine «n = 4»

Costante magica: $M_{(4)} = \dfrac{4 \bullet (4^2 + 1)}{2} = 34$

Il primo metodo

a) Scriviamo tutti i numeri dall'«1» al «16», e da sinistra a destra e dall'alto al basso, in ciascune casella in cui è composta la griglia completa «4 x 4»; prendiamo in considerazione la diagonale «1 – 6 – 11 – 16» e scambiamo l'«1» col «16», il «6» con l'«11».

b) Prendiamo in considerazione la diagonale «4 – 7 – 10 – 13»; scambiamo il «4» con il «13», il «7» con il «10», e riportiamo i valori così corretti nello schema (**c**) nel quale compare la soluzione.

a

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

b

16	2	3	4
5	11	7	8
9	10	6	12
13	14	15	1

c

				34
16	2	3	13	34
5	11	10	8	34
9	7	6	12	34
4	14	15	1	34
				34
34	34	34	34	

Il secondo metodo

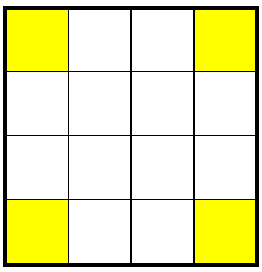
a) In ogni angolo del *quadrato magico*, si contrassegna un ***quadratino angolare*** con i lati di lunghezza pari a «$^n/_4$» evidenziandolo in giallo, (dove «n» è uguale alla lunghezza del lato del *quadrato magico* iniziale); in un quadrato «4 x 4», si dovono contrassegnare le caselle ai quattro angoli, in un quadrato «8 x 8», ogni *quadratino angolare* sarebbe costituito da un'area «2 x 2» posta in ognuno dei quattro angoli; in un quadrato «12 x 12», ogni *quadratino angolare* sarebbe costituito da un'area «3 x 3» agli angoli, e così via.

b) Si contrassegnano tutte le caselle al centro del *quadrato magico* in un'area quadrata di lunghezza pari a «$^n/_2$» evidenziandole in giallo, (dove «n» è uguale alla lunghezza di un lato del quadrato magico intero) il ***quadratino centrale*** non dovrebbe sovrapporsi ai ***quadratini angolari***, ma toccarli agli angoli; in un quadrato «4 x 4», il ***quadratino centrale*** sarebbe un'area di «2 x 2» caselle al centro; in un quadrato «8 x 8», il ***quadratino centrale*** sarebbe un'area «4 x 4» posto nel centro; in un quadrato «12 x 12», il ***quadratino centrale*** sarebbe un'area «6 x 6» posto nel centro e così via.

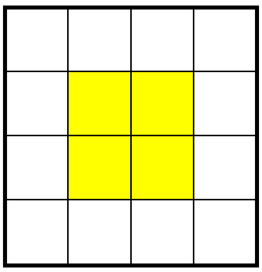
c) Si riempiono tutte la caselle della griglia con la serie dei numeri naturali scelta, proseguendo e da sinistra a destra e dall'alto in basso (in questo caso si inseriscono i numeri dall'«1» al «16».

d) I numeri inseriti nelle caselle evidenziate in giallo resteranno nelle rispettive caselle, non devono più essere spostati.

a



b



c

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

d

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

e) Si scambiano di posizione i numeri rimanenti, a coppie; il «2» col 15, il «3» col «14», il «5» col «12» il «9» con l'«8».

f) I numeri, ormai scambiati, sono evidenziati in risso.

g) rappresenta, infine, la soluzione.

e

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

f

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

g

				34
1	15	14	4	34
12	6	7	9	34
8	10	11	5	34
13	3	2	16	34
				34
34	34	34	34	

Griglia (8 x 8)

Seguendo il procedimento visto per il *quadrato magico normale* di ordine «n = 4», ormai noto, si può costruire un quadrato magico normale di ordine «n = 8», al lettore l'onere di costruire quadrati magici di ordine: 12, 16, 20, e così via.

Costante magica: $M_{(8)} = \frac{8 \bullet (8^2 + 1)}{2} = 260$

a

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

b

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

c

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

d

								260
1	2	62	61	60	59	7	8	260
9	10	54	53	52	51	15	16	260
48	47	19	20	21	22	42	41	260
40	39	27	28	29	30	34	33	260
32	31	35	36	37	38	26	25	260
24	23	43	44	45	46	18	17	260
49	50	14	13	12	11	55	56	260
57	58	6	5	4	3	63	64	260
								260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Il Terzo metodo

Prendiamo ancora un *quadrato magico normale* di ordine «n = 8»

Costante magica: $M_{(8)} = \frac{8 \bullet (8^2+1)}{2} = 260$

a) Scriviamo tutti i numeri dall'«1» al «64», e da sinistra a destra e dall'alto al basso, in ciascuna casella in cui è composta la griglia completa «8 x 8».

b) suddividiamo il quadrato «**a**» in sottoquadrati di matrice «4 x 4» ed in ciascuno di essi consideriamo le diagonali, segnate in grassetto su sfondo giallo, come in «**b**».

a

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	36	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

b

1	2	3	**4**	**5**	6	7	**8**
9	**10**	**11**	12	13	**14**	**15**	16
17	**18**	**19**	20	21	**22**	**23**	24
25	26	27	**28**	**29**	30	31	**32**
33	34	35	**36**	**36**	38	39	**40**
41	**42**	**43**	44	45	**46**	**47**	48
49	**50**	**51**	52	53	**54**	**55**	56
57	58	59	**60**	**61**	62	63	**64**

2) ogni numero che si trova su diagonale (su una casella con sfondo giallo) va sostituito col numero $(n^2 + 1) - a_{mn}$ che, si noti, corrisponde al complementare di «$n^2 + 1$»; nel nostro caso «n = 8» per cui «$n^2 + 1 = 8^2 + 1$» = «64 + 1 = 65».

[Per chiarimenti su «a_{mn}», vedere *Approfondimenti* – **Prime precisazioni**, a pagina 50]

Ad esempio:

«1» (corrispondente alla casella «a_{11}», prima riga e prima colonna) va sostituito con «65 – 1 = 64» (64 è il complementare di «1» rispetto a 65).

«15» (corrispondente ad «a_{27}», seconda riga e settima colonna) va sostituito con «65 – 15 = 50» (50 è il complementare di 15 rispetto a 65).

«29» (a_{45}, quarta riga e quinta colonna) con «65 – 29 = 36» (36 è il complementare di 29 rispetto a 65).

«18» (a_{32}) con «65 – 18 = 47»; e così via si ottiene il quadrato magico normale-rappresentato nello schema «d», la cui costante magica è «$M_{(8)}$ = 260».

c

64	2	3	**61**	**60**	6	7	**57**
9	**55**	**54**	12	13	**51**	**50**	16
17	**47**	**46**	20	21	**43**	**42**	24
40	26	27	**37**	**36**	30	31	**33**
32	34	35	**28**	**28**	38	39	**25**
41	**23**	**22**	44	45	**19**	**18**	48
49	**15**	**14**	52	53	**11**	**10**	56
8	58	59	**5**	**4**	62	63	**1**

d

								260
64	2	3	61	60	6	7	57	260
9	55	54	12	13	51	50	16	260
17	47	46	20	21	43	42	24	260
40	26	27	37	36	30	31	33	260
32	34	35	29	28	38	39	25	260
41	23	22	44	45	19	18	48	260
49	15	14	52	53	11	10	56	260
8	58	59	5	4	62	63	1	260
								260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Un procedimento forse più semplice

Presentiamo, adesso, un diverso procedimento con cui si perviene allo stesso quadrato magico normale ottenuta nella precedente griglia «d».

Scriviamo tutti i numeri dall'«1» al «64», e da sinistra a destra e dall'alto al basso, in ciascuna casella in cui è composta la griglia completa «**A**» e suddividiamola in quattro sottogriglie di «4 x 4» indicate come e «NO» *nord-ovest* (in alto a sinistra) e «NE» *nord-est* (in alto a destra) e «SE» *sud-est* (in basso a destra) e «SO» *sud-ovest* (in basso a sinistra).

Ribaltiamo i numeri presenti in ognuna delle due diagonali, indicate a colori, in modo che e la diagonale (1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64) diventi (64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1) e la diagonale (8, 15, 22, 29,36, 43, 50, 57) diventi (57, 50, 43,36, 29, 22, 15, 8), come riportato nella griglia «**B**».

Consideriamo, ora, la diagonale indicata a colori, nella sottogriglia «NO» e riportiamola, ribaltata, nella corrispondente diagonale, indicata a colori, della sottogriglia «SE», in modo tale che la diagonale (40, 47, 54, 61) diventi (25, 18, 11, 4), come indicato nella griglia «**C**».

Parimenti consideriamo la diagonale indicata a colori, nella sottogriglia «SE» e riportiamola, ribaltata, nella corrispondente diagonale, indicata a colori, della sottogriglia «NO», in modo taleche la diagonale (4, 11, 18, 25) diventi (61, 54, 47, 40), come indicato nella griglia «C».

A

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

B

64	2	3	4	5	6	7	**57**
9	**55**	11	12	13	14	**50**	16
17	18	**46**	20	21	**43**	23	24
25	26	27	**37**	**36**	30	31	32
33	34	35	**29**	**28**	38	39	40
41	42	**22**	44	45	**19**	47	48
49	**15**	51	52	53	54	**10**	56
8	58	59	60	61	62	63	**1**

Consideriamo, ora, la diagonale indicata a colori, nella sottogriglia «NE» e riportiamola, ribaltata, nella corrispondente diagonale, indicata a colori, della sottogriglia «SO», in modo tale che la diagonale (33, 42, 51, 60) diventi (32, 23, 14, 5), come indicato nella griglia «**D**».

Parimenti consideriamo la diagonale indicata a colori, nella sottogriglia «SO» e riportiamola, ribaltata, nella corrispondente diagonale, indicata a colori, della sottogriglia «NE», in modo tale che la diagonale (5, 14, 23, 32) diventi (60, 51, 42, 33), come indicato nella griglia «**D**».

C

64	2	3	**61**	5	6	7	8
9	55	**54**	12	13	14	15	16
17	**47**	46	20	21	22	23	24
40	26	27	37	29	30	31	32
33	34	35	36	28	38	39	**25**
41	42	43	44	45	19	**18**	48
49	50	51	52	53	**11**	10	56
57	58	59	60	**4**	62	63	1

D

64	2	3	61	**60**	6	7	57
9	55	54	12	13	**51**	50	16
17	47	46	20	21	43	**42**	24
40	26	27	37	36	30	31	**33**
32	34	35	29	28	38	39	25
41	**23**	22	44	45	19	18	48
49	15	**14**	52	53	11	10	56
8	58	59	**5**	4	62	63	1

Otteniamo, infine, un quadrato magico normale e di ordine (n = 8 = 4 • 2) e numero magico pari a «$M_{(8)}$ = 260», riportato nella griglia «**E**»..

E 260

64	2	3	61	60	6	7	57	260
9	55	54	12	13	51	50	16	260
17	47	46	20	21	43	42	24	260
40	26	27	37	36	30	31	33	260
32	34	35	29	28	38	39	25	260
41	23	22	44	45	19	18	48	260
49	15	14	52	53	11	10	56	260
8	58	59	5	4	62	63	1	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260

Matrice (4 x 4)

Prendendo ad esempio la costruzione di un quadrato magico di ordine (n = 4 = 4 • 1) basta scrivere, come riportato nella griglia «A», i numeri in ordine da «1» a «16» e poi procedere alla costruzione che andiamo ad esporre.

Nella matrice «**B**» invertiamo la diagonale (1, 6, 11, 16), indicata in colore nella griglia «**A**», che diviene (16,11, 6, 1)..

Nella matrice «**D**» invertiamo la diagonale (4, 7, 10, 13), indicata in colore, nella matrice «**C**», che diviene (13, 10, 7, 4).

A

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

B

16	2	3	4
5	**11**	7	8
9	10	**6**	12
13	14	15	**1**

C

16	2	3	4
5	11	7	8
9	10	6	12
13	14	15	1

D

16	2	3	**13**
5	11	**10**	8
9	**7**	6	12
4	14	15	1

Otteniamo, infine, riportato nella matrice «**D**», il quadrato magico normale e di ordine (n = 4) e di costante magica «$M_{(4)}$ = 34».

E 34

16	2	3	13	34
5	11	10	8	34
9	7	6	12	34
4	14	15	1	34
34	34	34	34	34

Altri quadrati magici

Premessa

I ***quadrati magici*** possono essere costruiti usando un sottoinsieme dei numeri compresi tra «x» a «y»; per esempio, un *quadrato magico* può essere costruito usando soltanto i ***numeri primi***, anche non in successione (in alcuni casi, come in questo, potrebbe essere necessario accettare l'«1» come numero primo per avere un quadrato magico).

In questo esempio, la costante magica è «111».

a

			111
31	73	7	111
13	37	61	111
67	1	43	111
111	111	111	111

Il quadrato magico del matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887 – 1920)

				139
22	12	18	87	139
88	17	9	25	139
10	24	89	16	139
19	86	23	11	139
139	139	139	139	139

Ramanujan è nato il: **22** / **12** / **1887**.

Se raggruppiamo le cifre che indicano la sua data di nascita a due a due otteniamo: 22 – 12 – 18 – 87, i numeri che compaiono nella prima riga.

La costante magica è $M_{(4)} = 139$

Se sommiamo le cifre della sua data di nascita, prese a due a due, otteniamo appunto 139.

Il quadrato magico dell'Autore (1948 - ?)

				75
1	7	19	48	75
45	22	8	0	75
9	-1	46	21	75
20	47	2	6	75
75	75	75	75	75

L'Autore è nato il: **01** / **07** / **1948**.

Se raggruppiamo le cifre che indicano la sua data di nascita a due a due otteniamo: 01 – 07 – 19 – 48, i numeri che compaiono nella prima riga.

La costante magica è $M_{(4)} = 75$

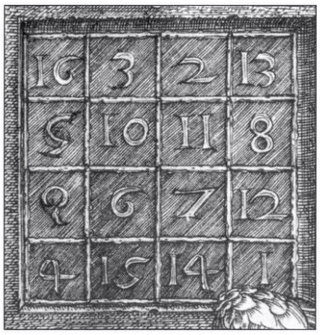
Se sommiamo le cifre della sua data di nascita, prese a due a due, otteniamo appunto «75».

Al lettore attento non sarà sfuggito che ho dovuto utilzzare sia lo zero «0» sia un numero negativo «-1».

La Melencolia I

La ***Melencolia I*** o ***Melancholia I*** è un'incisione a *bulino*, risalente al 1514; fa parte di una serie di tre incisioni, le ***Meisterstiche***, realizzate dall'artista rinascimentale tedesco **Albrecht Dürer** (1471 – 1528), in italiano arcaico noto come **Alberto Duro**, oppure **Durero**.

Al suo interno vi è rappresentato un *quadrato magico* particolare, ancora oggi oggetto di e studi e svariate interpretazioni da parte degli esperti.



Costante magica
$M_{(4)}$ = 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

il quadrato magico di **Dürer** è molto complesso, infatti, non è solo la somma dei numeri delle linee ed orizzontali e verticali e oblique a dare il valore costante di «34», ma anche le ***quaterne di numeri***, indicate col medesimo colore, negli schemi sottostanti.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

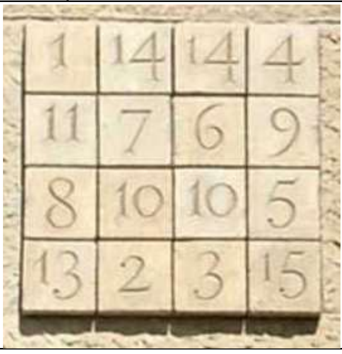
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Il quadrato magico di Subirachs

L'architetto spagnolo **Antoni Gaudì i Cornet** (1852 – 1926) inserì un quadrato magico di ordine «n = 4», raffigurandolo su una facciata della sua *Sagrada Família*, a Barcellona.

La sua particolare caratteristica è che la somma dei numeri e di ciascuna riga e di ciascuna colonna e di ciascuna delle due diagonali è sempre «33», l'età di **Gesù Cristo** nella ***passione***, quando fu crocefisso.



Costante magica
$M_{(4)}$ = 33

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Osservazioni

In realtà, quest'ultimo non è propriamente un *quadrato magico*, dato che e alcuni numeri mancano e alcuni numeri si ripetono più di una volta; mancano ed il «12» ed il «16», mentre ed il «10» ed il «14» sono ripetuti due volte.

Precisazioni

La ***Sagrada familia***, nome completo: ***Temple Expiatori de la Sagrada Família*** (*Tempio Espiatorio della Sacra Famiglia*), di Barcellona in Catalogna (Spagna), è una grande basilica cattolica (minore) progettata dall'architetto **Antoni Gaudí**,

Anche per il quadrato magico di **Subirachs** si possono individuare delle quaterne di numeri, indicate col medesimo colore negli schemi sottostanti, il valore costante di «33».

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	*14*	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Quadrato o panmagico o diabolico di Nasik

Questo e ben noto ed antico *quadrato magico* fu trovato nel tempio di **Parshvanath Jain a Khajuraho**; è datato verso il «X secolo» e si riferisce al ***Chautisa Yantra***.

				34
7	12	1	14	34
2	13	8	11	34
16	3	10	5	34
9	6	15	4	34
				34
34	34	34	34	

Quadrato magico normale

Ordinerdine «n = 4»

Costante magica: $M_{(4)} = 34$

. . . ma non solo.

La somma dei quattro numeri agli angoli: 7 + 14 + 9 + 4 = **34**.
La somma dei quattro numeri centrali: 13 + 8 + 3 + 10 = **34**.
La somma dei quattro numeri, dei quattro *sotto-quadrati* (2 x 2) negli spigoli:
7 + 12 + 2 + 13 = **34**, 1 + 14 + 8 + 11 = **34**, 16 + 3 + 9 + 6 = **34**, 10 + 5 + 15 + 4 = **34**.
Anche la somma dei numeri di tutti gli altri *sotto-quadrati* (2 x 2), presenti nella griglia del *quadrato magico normale* (4 x 4):
12 + 1 + 13 + 8 = **34**, 2 + 13 + 16 + 3 = **34**, 8 + 11 + 10 + 5 = **34**, 3 + 10 + 6 + 15 = **34**.

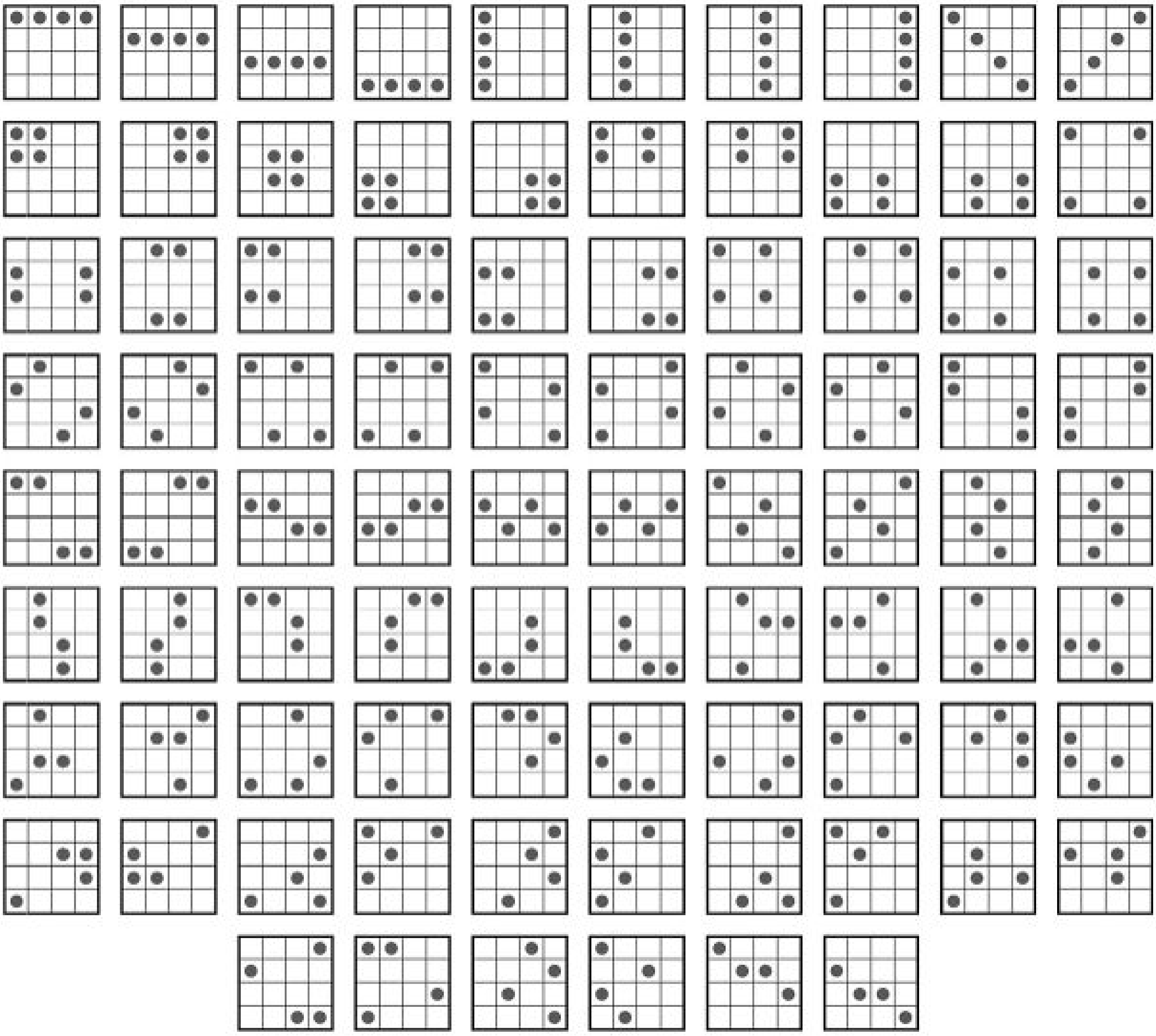
Per questo è stato definito diabolico, anche se la sua perfezione sembra piuttosto divina in quanto ricorderebbe l'età in anni di Gesù [33 anni + (3 mesi + 9 mesi di vita uterina)]; vi è poi la somma fra le decine e le unità «3 + 4 = **7**», numero divino per eccellenza.

Un altro quadrato altrettanto diabolico

Un altro quadrato panmagico che possiede «86» configurazioni diaboliche, è di ordine «4» e costante magica «30», anziché «34», perché inizia con lo zero.

				30
0	13	11	6	30
7	10	12	1	30
14	3	5	8	30
9	4	2	15	30
				30
30	30	30	30	

Tutte le possibili configurazioni sono riportate nella pagina seguente; le stesse configurazioni valgono per il ***quadrato o panmagico o diabolico di* Nasik**.



Un altro quadrato meno diabolico

34

1	15	14	4	34
12	6	7	9	34
8	10	11	5	34
13	3	2	16	34

34

34	34	34	34

Quadrato magico normale

Ordinerdine «n = 4»

Costante magica: $M_{(4)} = 34$

. . . ma non solo.

La somma dei quattro numeri agli angoli: 1 + 4 + 13 + 16 = **34**.
La somma dei quattro numeri centrali: 6 + 7 + 10 + 11 = **34**.
La somma dei quattro numeri, dei quattro *sotto-quadrati* (2 x 2) negli spigoli:
1 + 15 + 12 + 6 = **34,** 14 + 4 + 7 + 9 = **34**
8 + 10 + 13 + 3 = **34**, 11 + 5 + 2 + 16 = **34**

Trovare un quadrato magico normale equivalente

a

			15
2	7	6	15
9	5	1	15
4	3	8	15
15	15	15	15

Prendiamo un *quadrato magico normale* di ordine «n», e consideriamo il quadrato ottenuto sottraendo a «n^2 + 1» ogni numero del quadrato di partenza.

Questo nuovo quadrato è e magico e normale con la stessa costante magica «$M_{(n)}$».

In pratica è come se avessimo effettuato due ribaltamenti.

b

			15
8	3	4	15
1	5	9	15
6	7	2	15
15	15	15	15

Esempi

Essendo «n = 3» si ha: 3^2 + 1 = 10

Da cui: 10 – 2 = 8, 10 – 7 = 3, 10 – 6 = 4, e così via.

Quadrati eteromagici

Premessa

Si definisce ***quadrato eteromagico*** (o ***eteroquadrato***) di ordine «n» (intero positivo) una collocazione degli interi da «1 a n^2» in una matrice quadrata, tale che le somme e delle righe e delle colonne e delle due diagonali siano tutte diverse.

Di quadrati *eteromagici* non ne esiste alcuno di ordine «n = 2», ma ne esistono per ogni ordine «n ≥ 3».

I *quadrati eteromagici* si comportano esattamente al contrario rispetto a quelli magici.

Vi sono due distinti procedimenti che consentono di costruire quadrati *eteromagici* rispettivamente o di ordine dispari o di ordine pari.

Ordine pari

Per «n» pari si collocano i successivi interi procedendo sulle successive righe sia da destra a sinistra sia dall'alto al basso, e quindi scambiando l'«1» con il «2».

Nello schema «**a**» è rappresentato un quadrato *eteromagico* di ordine «n = 4».

a

				34
2	1	3	4	10
5	6	7	8	26
9	10	11	12	42
13	14	15	16	58
				35
29	31	37	40	

Ordine dispari

Per «n» dispari si collocano i successivi interi nelle caselle incontrate procedendo a spirale a partire, ad esempio, dalla casella e più in alto e più a sinistra.

Nello schema «**b**» è rappresentato un quadrato *eteromagico* di ordine «n = 5».

b

					85
1	2	3	4	5	15
16	17	18	19	6	76
15	24	25	20	7	91
14	23	22	21	8	88
13	12	11	10	9	55
					73
59	78	79	74	35	

Quadrati P-multimagici

Premessa

In matematica, un ***quadrato P-multimagico*** (o ***quadrato satanico***) è un *quadrato magico* che rimane magico anche quando tutti i suoi valori, all'interno di ogni casella, vengono elevati ad una potenza «k», dove «$1 \leq k \leq P$»; un *quadrato magico* viene chiamato: ***bimagico*** se è *2-multimagico*, ***trimagico*** se è *3-multimagico*, e così via.

Il primo *quadrato tetramagico* (*4-multimagico*), di ordine «512», (griglia di «512 x 512»), venne costruito, nel Maggio 2001, dai matematici francesi e **André Viricel** (1913 – 2003) e Christian Boyer; circa un mese dopo (Giugno 2001), e **Viricel** e **Boyer** presentarono il primo *quadrato pentamagico* (*5-multimagico*), di ordine «1 024» (griglia 1 024 x 1 024).

Questi due quadrati sono stati oggetto di un articolo pubblicato, nel 2001, in ***Pour La Science***, edizione francese di ***Scientific American***.

Il più piccolo *quadrato satanico normale* conosciuto è di ordine «n = 8» con costante magica «$M_{(8)}$ = 260»; diagramma «**x**».

x

								260
5	31	35	60	57	34	8	30	260
19	9	53	46	47	56	18	12	260
16	22	42	39	52	61	27	1	260
63	37	25	24	3	14	44	50	260
26	4	64	49	38	43	13	23	260
41	51	15	2	21	28	62	40	260
54	48	20	11	10	17	55	45	260
36	58	6	29	32	7	33	59	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260

Elevando al quadrato (x^2) ogni valore all'interno di ogni casella, si ottiene il quadrato magico, sempre di ordine «n = 8» con costante magica «$M_{(8)}$ = 11 180»; diagramma «**y**».

y

								11 180
25	961	1 225	3 600	3 249	1 156	64	900	11 180
361	81	2 809	2 116	2 209	3 136	324	144	11 180
256	484	1 764	1 521	2 704	3 721	729	1	11 180
3 969	1 369	625	576	9	196	1 936	2 500	11 180
676	16	4 096	2 401	1 444	1 849	169	529	11 180
1 681	2 601	225	4	441	784	3 844	1 600	11 180
2 916	2 304	400	121	100	289	3 025	2 025	11 180
1 296	3 364	36	841	1 024	49	1 089	3 481	11 180
11 180	11 180	11 180	11 180	11 180	11 180	11 180	11 180	11 180

Quadrati magici imperfetti

Premessa

I *quadrati magici imperfetti* (o *non normali*) non sono costituiti da una serie di numeri naturali da «1» a «n^2», come il caso dei quadrati magici normali, ma stabilito il primo numero, la successione della serie avviene in una progressione ben definita.

Progressione aritmetica

I *quadrati magici imperfetti* di questa specie sono composti da una serie di numeri naturali, con un numero iniziale «a_1», che prosegue con un passo regolare «d» (step per chi ama i termini inglesi), in modo tale che la differenza fra un numero ed il precedente è una costante.

Esempio

Consideriamo la serie: 2, 5, 8, . . . 68, 71, 74.

In questo caso possiamo costatare che siamo in presenza di una ***progressione aritmetica*** in cui ogni numero «k-*esimo*» è uguale al precedente più il passo «d»: in termini matematici: $a_k = a_{k-1} + d$.

Possiamo, pertanto, trovare una formula generale per generare tutti i termini della nostra progressione aritmetica: $ak = a_1 + d \bullet (k - 1)$.

Sapendo che: $a_1 = 2$, $d = 3$.

Si ha:

$a_1 = 2$
$a_2 = a_1 + d \bullet (k - 1) = 2 + 3 \bullet (2 - 1) = 5$
$a_3 = 2 + 3 \bullet (3 - 1) = 8$
$a_{23} = 2 + 3 \bullet (23 - 1) = 68$
$a_{24} = 2 + 3 \bullet (24 -1) = 71$
$a_{25} = 2 + 3 \bullet (24 - 1) = 74$

Nel caso dei *quadrati magici imperfetti* in progressione aritmetica di ordine «n», la costante magica «$M'_{(n)}$» si ottiene con la:

$$M'_{(n)} = \frac{n \bullet (n^2 - 1)}{2} \bullet a_2 - \frac{n \bullet (n^2 - 3)}{2} \bullet a_1$$

In cui: a_1 è il primo numero della serie (nel nostro esempio $a_1 = 2$) – a_2 è il secondo numero della serie (nel nostro esempio $a_2 = 5$)

In alternativa possiamo applicare la:

$$M'_{(n)} = \frac{n}{2} \bullet [2 \bullet a_1 + d \bullet (n^2 - 1)]$$

Nel nostro esempio, con un *quadrato magico imperfetto* di ordine «n = 5», avremmo:

Costante magica: $M'_{(5)} = \frac{5 \bullet (5^2 - 1)}{2} \bullet 5 - \frac{5 \bullet (5^2 - 3)}{2} \bullet 2 = 300 - 110 = 190$

Costante magica: $M'_{(5)} = \frac{5}{2} \bullet [2 \bullet 2 + 3 \bullet (5^2 - 1)] = 190$

Il *quadrato magico imperfetto* è riportato nello schema «**a**».

a 190

50	71	2	23	44	190
68	14	20	41	47	190
11	17	38	59	65	190
29	35	56	62	8	190
32	53	74	5	26	190
190	190	190	190	190	190

Un caso particolare

Seguendo la medesima metodologia adottata per le progressioni aritmetiche, possiamo creare dei quadrati magici utilizzando una serie continua di numeri nell'intervallo (v ÷ z) pari a ($z - v + 1 = n^2$), con «n» uguale all'ordine del quadrato magico che si deve creare.

In pratica vogliamo costruire un *quadrato magico imperfetto* composto da una serie di numeri naturali, con un numero iniziale «a_1», che prosegue con un passo regolare «d = 1» in modo tale che la differenza fra un numero ed il precedente è, come costante, l'unità.

Esempio

Consideriamo una griglia (5 x 5) da cui si genererà un quadrato magico di ordine (n = 5) ed una serie continua di numeri che va da «28» a «52» ($52 - 28 + 1 = 25 = 5^2$).

Costruiamo il quadrato magico, visualizzato nella griglia «**A**», in questa pagina, utilizzando **Il primo metodo**, indicato a pagina 4, per costruire, a partire dalla griglia «**A**», il quadrato magico normale «**B**».

Dall'equazione:

$$M_{(n)} = \frac{n \bullet (n^2 - 1)}{2} \bullet a_2 - \frac{n \bullet (n^2 - 3)}{2} \bullet a_1$$

Possiamo calcolare la costante magica «$M_{(5)}$» che, assumendo e «$a_1 = 28$» e «$a_2 = 29$», risulta:

$$M'_{(5)} = \frac{5 \bullet (5^2 - 1)}{2} \bullet 29 - \frac{5 \bullet (5^2 - 3)}{2} \bullet 28 = 1\,740 - 1\,540 = 200$$

Calcoliamo la sommatoria «S» dei numeri (28 ÷ 52) che è data prodotto e della media aritmetica, fra e «x = 28» e «y = 52» ed il numero di termini:

$$S = \left[\frac{(x + y)}{2}\right] \bullet (52 - 28 + 1)$$

Da cui, risolvendo, si ha:

$$S = \left[\frac{(28 + 52)}{2}\right] \bullet (52 - 28 + 1) = 40 \bullet 25 = 1\,000$$

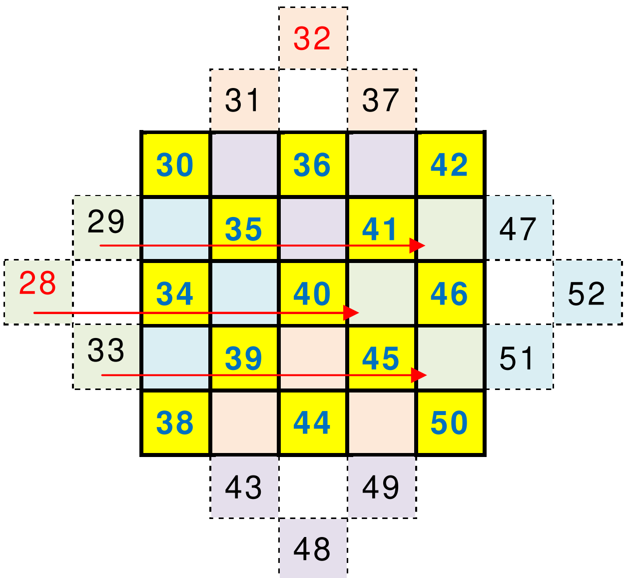
1) Alla griglia iniziale di (5 x 5) in giallo «**A**», si aggiunge una serie di caselle ausiliarie indicate tratteggiate, nel punto medio di ogni lato; si aggiungono delle strisce di caselle riducendo, ogni volta, il loro numero di due, fino a che resta un'unica casella.

2) Iniziando, ad esempio, dall'unica casella ausiliaria della prima striscia del lato sinistro, segnandovi il numero «28» (essendo il primo numero della progressione aritmetica scelta «28 ÷ 52») e si prosegue diagonalmente nelle caselle segnando successivamente i numeri della nostra serie fino ad segnare il «32» nell'unica casella ausiliaria dell'ultima striscia sul lato superiore.

Si prosegue, ancora, seguendo i passi e «**3)**» e «**4)**» e «**5)**» e «**6)**» e «**7)**» come indicato a pagina e 4 e 5, considerando, ovviamente, i nuovi numeri.

Otteniamo, infine, il quadrato magico non normale «**B**», composto da una successione di numeri che non parte da «1»; in questo modo possiamo costruire quadrati magici utilizzando qualsiasi intervallo di numeri.

A



B

					200
30	43	36	49	42	200
47	35	48	41	29	200
34	52	40	28	46	200
51	39	32	45	33	200
38	31	44	37	50	200
200	200	200	200	200	200

Progressione geometrica

I *quadrati magici imperfetti* di questa specie sono composti da una serie di numeri naturali, con un numero iniziale «a_1», che prosegue con un passo regolare «q» (step per chi ama i termini inglesi), in modo tale che il rapporto fra un numero ed il precedente è una costante.

Esempio

Consideriamo la serie: 2, 4, 8, . . . 128, 256, 512.

In questo caso possiamo costatare che siamo in presenza di una ***progressione geometrica*** in cui ogni numero «k-*esimo*» è uguale al precedente moltiplicato il passo «q»: in termini matematici: $a_k = a_{k-1} \bullet q$.

Possiamo, pertanto, trovare una formula generale per generare tutti i termini della nostra progressione aritmetica: $ak = a_1 \bullet q^{(k-1)}$.

Sapendo che: $a_1 = 2$, $q = 2$

Si ha:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 \bullet q^{(k-1)} = 2 \bullet 2^{(2-1)} = 4$

$a_3 = 2 \bullet 2^{(3-1)} = 8$

$a_7 = 2 \bullet 2^{(7-1)} = 128$

$a_8 = 2 \bullet 2^{(8-1)} = 256$

$a_9 = 2 \bullet 2^{(9-1)} = 512$

Nel caso dei *quadrati magici imperfetti* in progressione geometrica di ordine «n», la costante magica «$M'_{(n)}$» si ottiene con la:

$$M'_{(n)} = \frac{a_2^{\frac{n \bullet (n^2-1)}{2}}}{a_1^{\frac{n \bullet (n^2-3)}{2}}}$$

In cui: a_1 è il primo numero della serie (nel nostro esempio $a_1 = 2$) – a_2 è il secondo numero della serie (nel nostro esempio $a_2 = 5$)

In alternativa possiamo applicare la:

$$M'_{(n)} = a_1^{n} \bullet q^{\left[\frac{n \bullet (n^2-1)}{2}\right]}$$

Adesso, per contro, la costante magica non indica la somma dei numeri che sono in ogni e righe e colonne e diagonali, bensì i loro prodotti.

Nel nostro esempio, con un *quadrato magico imperfetto* di ordine «n = 3», avremmo:

$$\text{Costante magica: } M'_{(3)} = \frac{4^{\frac{3 \bullet (3^2-1)}{2}}}{2^{\frac{3 \bullet (3^2-3)}{2}}} = \frac{4^{12}}{2^{9}} = \frac{16\,777\,216}{512} = 32\,768$$

$$\text{Costante magica: } M'_{(3)} = 2^3 \bullet 2^{\left[\frac{3 \bullet (3^2-1)}{2}\right]} = 8 \bullet 2^{12} = 8 \bullet 4\,096 = 32\,768$$

Il *quadrato magico imperfetto* è riportato nello schema «**b**».

b — 32 768

256	2	64	32 768
8	32	128	32 768
16	512	4	32 768
32 768	32 768	32 768	32 768

Sempre sui quadrati magici imperfetti

Numeri relativi

Consideriamo una serie di ***numeri relativi*** in progressione aritmetica, con passo regolare di «d = 2»:

-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9

Costruiamo,ora, un *quadrato magico imperfetto* di ordine (n = 3).

a 3

7	-7	3	3
-3	1	5	3
-1	9	-5	3
3	3	3	3

Numeri razionali

Consideriamo una serie di ***numeri razionali*** in progressione aritmetica, con passo regolare di «d = $^3/_5$»:

$$-\frac{4}{5},\quad -\frac{1}{5},\quad \frac{2}{5},\quad 1,\quad \frac{8}{5},\quad \frac{11}{5},\quad \frac{14}{5},\quad \frac{17}{5},\quad 4$$

Costruiamo, ora, un *quadrato magico imperfetto* di ordine (n = 3).

b $\frac{24}{5}$

$\frac{17}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{24}{5}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{24}{5}$
1	4	$-\frac{1}{5}$	$\frac{24}{5}$
$\frac{24}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{24}{5}$

Numeri irrazionali

Consideriamo una serie di ***numeri irrazionali*** in progressione aritmetica, con passo regolare di «d = √5 - √2»:

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{5},\quad 2\sqrt{5}-\sqrt{2},\quad 3\sqrt{5}-2\sqrt{2},\quad 4\sqrt{5}-3\sqrt{2},\quad 5\sqrt{5}-4\sqrt{2},\quad 6\sqrt{5}-5\sqrt{2},\quad 7\sqrt{5}-6\sqrt{2},\quad 8\sqrt{5}-7\sqrt{2}$$

Costruiamo, ora, un *quadrato magico imperfetto* di ordine (n = 3).

c $12\sqrt{5}-9\sqrt{2}$

$7\sqrt{5}-6\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$5\sqrt{5}-4\sqrt{2}$	$12\sqrt{5}-9\sqrt{2}$
$2\sqrt{5}-\sqrt{2}$	$4\sqrt{5}-3\sqrt{2}$	$6\sqrt{5}-5\sqrt{2}$	$12\sqrt{5}-9\sqrt{2}$
$3\sqrt{5}-2\sqrt{2}$	$8\sqrt{5}-7\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$12\sqrt{5}-9\sqrt{2}$
$12\sqrt{5}-9\sqrt{2}$	$12\sqrt{5}-9\sqrt{2}$	$12\sqrt{5}-9\sqrt{2}$	$12\sqrt{5}-9\sqrt{2}$

Numeri complessi

Consideriamo una serie di ***numeri complessi*** in progressione aritmetica, con passo regolare di «d = 2-5*i*»:

3+2*i*, 5-3*i*, 7-8*i*, 9-13*i*, 11-18*i*, 13-23*i*, 15-28*i*, 17-33*i*, 19-38*i*

Costruiamo, ora, un *quadrato magico imperfetto* di ordine (n = 3).

a

			33-54*i*
17-33*i*	3+2*i*	13-23*i*	33-54*i*
7-8*i*	11-18*i*	15-28*i*	33-54*i*
9-13*i*	19-38*i*	5-3*i*	33-54*i*
33-54*i*	33-54*i*	33-54*i*	33-54*i*

Numeri composti

Nello schema «**X**» è rappresentato un quadrato *eteromagico* di ordine «n = 43» nelle cui caselle sono presenti.dei numeri formati e da una parte intera e da una parte frazionaria.

X

				43
16 $^{1}/_{4}$	18 $^{1}/_{4}$	15 $^{1}/_{4}$	17 $^{1}/_{4}$	43
8 $^{1}/_{4}$	10 $^{1}/_{4}$	7 $^{1}/_{4}$	9 $^{1}/_{4}$	43
4 $^{1}/_{4}$	6 $^{1}/_{4}$	3 $^{1}/_{4}$	5 $^{1}/_{4}$	43
12 $^{1}/_{4}$	14 $^{1}/_{4}$	11 $^{1}/_{4}$	13 $^{1}/_{4}$	43
43	43	43	43	43

Quadrati alfamagici

Premessa

Si dicono ***quadrati alfamagici*** quei quadrati magici all'apparenza normali, ma che godono della proprietà particolare per la quale se ai numeri scritti in cifre si sostituiscono quelli scritti in lettere, si contano poi i caratteri di ogni casella e si scrivono i nuovi numeri ottenuti, si produrrà un nuovo quadrato sempre magico e dello stesso ordine di quello di partenza.

Utilizzando la lingua italiana

Facciamo un esempio con un quadrato magico di ordine «n = 3» con costante magica «$M_{(3)}$ = 381»; diagramma «**a**».

a 381

87	165	129	381
169	127	85	381
125	89	167	381
381	381	381	381

Se, in ogni casella, si sostituiscono gli stessi valori scritti in lettere, si ottiene la griglia (3 x 3); diagramma «**b**».

b

ottantasette	centosessantacinque	centoventinove
centosessantanove	centoventisette	ottantacinque
centoventicinque	ottantanove	centosessantasette

Contando i caratteri all'interno di ogni casella ed inserendo i numeri, così ottenuti, nella corrispondente casella, si ottiene un altro quadrato magico sempre di ordine «n = 3» con costante magica «$M_{(3)}$ = 45»; diagramma «**c**».

c 45

12	19	14	45
17	15	13	45
16	11	18	45
45	45	45	45

Per non spezzare lo schema che segue, sono saltato direttamente all'altra pagina.

Per essere internazionali

Per chi ama la lingua inglese, ecco un altro esempio con un quadrato magico di ordine «n = 3» con costante magica «$M_{(3)}$ = 45»; diagramma «**a**»..

a

			45
5	22	18	45
28	15	2	45
12	8	25	45
			45
45	45	45	

Se, in ogni casella, si sostituiscono gli stessi valori scritti in lettere (in ***King english***), si ottiene la griglia (3 x 3); diagramma «**b**».

b

five	twenty two	eighteen
Twenty eight	fifteen	two
twelve	eight	Twenty five

Contando i caratteri all'interno di ogni casella (gli spazi non vengono contati) ed inserendo i numeri, così ottenuti, nella corrispondente casella, si ottiene un altro quadrato magico sempre di ordine «n = 3» con costante magica «$M_{(3)}$ = 21»; diagramma «**c**».

c

			21
4	9	8	21
11	7	3	21
6	5	10	21
			21
21	21	21	

Quadrati antimagici

Premessa

Si definisce ***quadrato antimagico*** di ordine «n» (intero positivo) uno schieramento degli interi da 1 a «n^2» in una matrice «n × n» tale che le somme ottenute dalle sue «n» righe, dalle sue «n» colonne e dalle sue due diagonali formano una sequenza di «2n + 2» interi consecutivi.

I quadrati antimagici più ridotti sono i due seguenti e «**a**» e «**b**» di ordine «n = 4».

a

				34
2	15	5	13	35
16	3	7	12	38
9	8	14	1	32
6	4	11	10	31
				29
33	30	37	36	

(2 + 3 + 14 + 10) = **29**
(15 + 3 + 8 + 4) = **30**
(6 + 4 + 11 + 10) = **31**
(9 + 8 + 14 + 1) = **32**
(2 + 16 + 9 + 6) = **33**
(13 + 16 + 9 + 6) = **34**
(13 + 7 + 8 + 6) = **35**
(13 + 12 + 1 + 10) = **36**
(5 + 7 + 14 + 11) = **37**
(16 + 3 + 7 + 12) = **38**

b

				32
1	13	3	12	29
15	9	4	10	38
7	2	16	8	33
14	6	11	5	36
				31
37	30	34	35	

(1 + 13 + 3 + 12 = **29**
(13 + 9 + 2 + 6) = **30**
(1 + 9 + 16 + 5) = **31**
(12 + 4 + 2 + 14) = **32**
(7 + 2 + 16 + 8) = **33**
(3 + 4 + 16 + 11) = **34**
(12 + 10 + 8 + 5) = **35**
(14 + 6 + 11 + 5) = **36**
(1 + 15 + 7 + 14) = **37**
(15 + 9 + 4 + 10) = **38**

Quadrati magici moltiplicativi

Premessa

Ignorando il vincolo che i numeri contenuti nel quadrato e debbano essere consecutivi e debbano partire da «1», si possono elaborare diverse varianti sul tema dei quadrati magici.

I *quadrati magici moltiplicativi* sono magici rispetto alla moltiplicazione anziché rispetto all'addizione, ovvero, i prodotti dei numeri e di ogni riga e di ogni colonna e di ogni diagonale sono uguali; il più piccolo *quadrato magico moltiplicativo* è di ordine (n = 3) ed ha costante magica $Mm_{(3)}$ = 216:

	X		216
12	1	18	216
9	6	4	216
2	36	3	216
216	216	216	216

Quadrati latini

Definizione

Un ***quadrato latino*** di ordine «n» è una griglia quadrata di «n x n» caselle nella quale compaiono «n» simboli diversi e che soddisfa le seguenti condizioni:

1) in ogni cella della griglia compare un simbolo
2) ed in ogni riga ed in ogni colonna, ciascun simbolo compare una volta sola.

Come simboli, si usano di solito gli interi da «1» a «n», ma non vi sono limiti alla fantasia..

Esempi di quadrati latini

1	2	3
3	1	2
2	3	1

خ	ض	غ
غ	خ	ض
ض	غ	خ

Il numero dei quadrati latini, che è possibile comporre, cresce in modo impressionante all'auomentare del numero «n».

n	Numero di quadrati latini
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161 280
6	812 851 200
7	61 479 419 904 000
8	108 776 032 459 082 956 800
9	5 524 751 496 156 892 842 531 225 600
10	9 982 437 658 213 039 871 725 064 756 920 320 000

Quadrati greco-latini

Definizione

Un ***quadrato greco-latino*** di ordine «n» è una sovrapposizione (intesa come prodotto cartesiano ordinato) di due quadrati latini di ordine «n», formati da due insiemi diversi di simboli e «S1» e «S2» che soddisfa la seguente condizione:

1) ciascuna coppia ordinata di simboli compare una sola volta nel quadrato (ovvero ciascun simbolo del primo insieme deve essere accoppiato con ciascun simbolo del secondo insieme).

Se gli insiemi e «S_1» e «S_2» sono formati da n simboli allora le coppie possibili, e ordinate e distinte, sono «$n \times n = n^2$».

Esempi di quadrati *greco-latini*

2,2	3,1	1,3
1,1	2,3	3,2
3,3	1,2	2,1

Bβ	Cα	Aγ
Aα	Bγ	Cβ
Cγ	Aβ	Bα

Come ottenere un quadrato *greco-latino*

Per costruire un *quadrato greco-latino* si può partire da due distinti *quadrati latini* per poi, successivamente, sovrapporli; due *quadrati latini* che, sovrapposti, danno origine ad un *quadrato greco-Latino* si dicono ***ortogonali***.

Partiamo dai due *quadrati latini* rappresentati nei due schemi sottostanti e «1°» e «2°»; il primo contenente cinque differenti lettere *italiche* e «A» e «B» e «C» e «D» e «E», il secondo contenente cinque differenti lettere *greche* e «α» e «β» e «γ» e «δ» e «ε».

1°

A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

2°

α	β	γ	δ	ε
β	γ	δ	ε	α
γ	δ	ε	α	β
δ	ε	α	β	γ
ε	α	β	γ	δ

Unendo (sovrapponendo) i due *quadrati latini*, rappresentati negli schemi e «1°» e «2°», si ottiene il seguente *quadrato greco-latino* rappresentato nello schema «3°».

3°

Aα	Bβ	Cγ	Dδ	Eε
Bβ	Cγ	Dδ	Eε	Aα
Cγ	Dδ	Eε	Aα	Bβ
Dδ	Eε	Aα	Bβ	Cγ
Eε	Aα	Bβ	Cγ	Dδ

Un'applicazione pratica
«Il problema e degli aspirapolvere e delle casalinghe»

Bisogna collaudare «5» modelli diversi di aspirapolvere per scoprire qual'è il migliore; si vuole che tutti gli aspirapolvere siano provati da «5» casalinghe, le quali daranno il loro giudizio su ciascuno di essi.

Ciascun aspirapolvere deve essere utilizzato da ciascuna casalinga per il periodo di una settimana; è possibile organizzare le prove in modo da avere i risultati nel giro di «5» settimane, come?

Per risolvere il quesito basta ricondursi al problema equivalente di costruire un *quadrato greco-latino* di ordine (n = 5); identificheremo e gli aspirapolvere con le lettere e «A» e «B» e «C» e «D» e «E», le collaudatrici con i numeri e «1» e «2» e «3» e «4» e «5».

A questo punto costruiamo due *quadrati latini ortogonali*: quello degli aspirapolvere «**A**», quello delle casalinghe «**C**»

A

A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

C

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

A questo punto, sarà sufficiente sovrapporli per ottenere il *quadrato greco-latino*, visualizzato nel diagramma «**AC**», che indica la possibile distribuzione, nel corso delle cinque settimane (vedi le righe) degli aspirapolvere alle casalinghe.

AC

A1	B2	C3	D4	E5
B2	C3	D4	E5	A1
C3	D4	E5	A1	B2
D4	E5	A1	B2	C3
E5	A1	B2	C3	D4

Curiosità sui quadrati latini

Permutando tra loro o due righe o due colonne in un *quadrato latino* quello che si ottiene è un altro quadrato latino; più precisamente due quadrati latini si dicono isotopici (o isotopi) se possono essere ottenuti l'uno dall'altro mediante permutazione o delle righe o delle colonne; si dimostra che l'isotopia è una relazione di equivalenza.

Il popolare gioco del **Sodoku** si basa su un quadrato latino e di ordine (n = 9) e di «81» caselle, con una griglia di (9 x 9).

Il numero di quadrati latini, di ordine (n = 9), ottenibili è:

5 524 751 496 156 892 842 531 225 600 (poco meno di 5,525 ● 10^{27}).

Uno strano quadrato *greco-latino*

Nel novembre del 1959, la copertina dello ***Scientific American*** riproduceva una pittura ad olio, eseguite dall'artista **Emi Kasai** del corpo redazionale, raffigurante il quadrato *greco-latino* di ordine «10» simile a quello riprodotto qui sotto il quale mostra il tappeto, a punto ago, realizzato nel 1960 dalla signora **Karl Wihtol** di ***Middletown***, nel *New Jersey*, che ha copiato il disegno della copertina.

I colori interni di ogni casella formano un quadrato latino, i colori esterni ne formano un altro; in ogni e riga e colonna ogni colore compare una sola volta come coppia sia come colore interno sia come colore esterno.

Se attribuiamo ad ognuno dei dieci colori che compongono l'opera un numero dallo zero «0» al nove «9», ad ogni casella possiamo attribuire un numero; la prima cifra (quella delle decine) designa il colore interno), la seconda cifra (quella delle unità) designa il colore esterno.

Il quadrato *greco-latino*, sopra raffigurato può, pertanto, essere rappresentato, mediante numeri, dalla matrice di ordine «n = 10» mostrata quì appresso.

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Questo quadrato contraddice l'***ipotesi di*** **Eulero** che affermava che è impossibile costruire un quadrato *greco-latino* di ordine «10» (n = 10), ed in generale la stessa impossibilità si estendeva a tutti i quadrati in cui «n» è un numero non completamente pari.

L'*ipotesi di Eulero* è falsa per tutti i valori di «n = 4 • k + 2», in cui sia «n > 6».

Nella fattispecie, per «k = 2» si avrebbe «n = 4 • 2 + 2 = 10»

Precisazioni

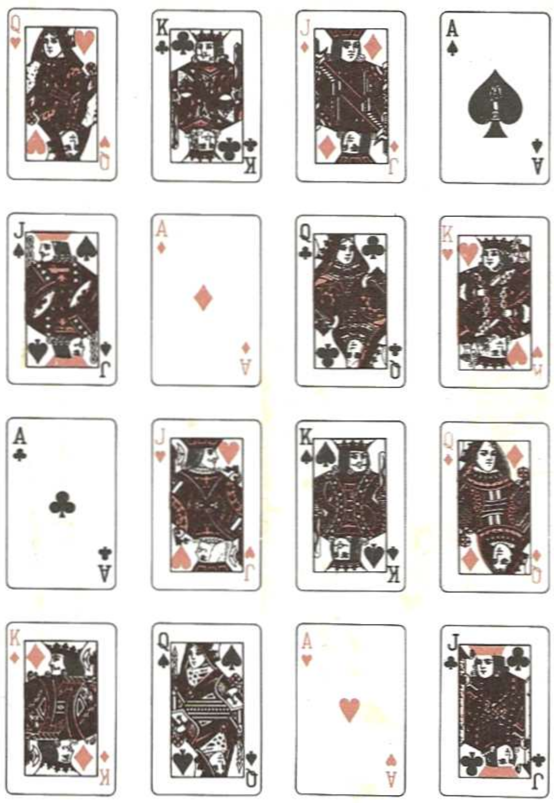
Leonhard Euler (1707 – 1783), **Eulero** in italiano, fu un e fisico e matematico svizzero.

I numeri *non completamente* pari sono quelli non divisibili per quattro (4).

Un quadrato *greco-letino* costruito con le carte

Lo schema sottostante mostra un modo di sistemare le sedici carte da gioco più alte in modo tale che nessun o valore o colore compaia due volte sia in una qualsiasi e riga e colonna sia nelle due diagonali principali.

Da notare che e le quattro carte ad ogni angolo e le quattro carte centrali, formano anch'esse dei gruppi in cui sono presenti tutti e i valori e i colori.



Rettangoli magici

Premessa

Oltre ai *quadrati magici* si possono costruire anche dei rettangoli magici nei quali il numero della righe è differente dal numero delle colonne; ambedue presentano una costante magica anche se diversa fra le riche e le colonne.

Facciamo un esempio.

In un rettangolo di (3 *righe* x 5 *colonne*) vi sono «15» caselle «3 • 5 = 15», come nello schema «**a**».

La somma della serie dei numeri naturali «1 ÷ 15» è data da:

$$S(n) = 1 + 2 + ... 14 + 15 = \sum_1^{15} = \frac{15 \bullet (15 + 1)}{2} = 120$$

La costante magica $M_{(3)}$ di ognuna delle tre righe dovrà essere:

$$M_{(3)} = \frac{120}{3} = 40$$

La costante magica $M_{(5)}$ di ognuna delle cinque colonne dovrà essere:

$$M_{(5)} = \frac{120}{5} = 24$$

Ovviamente le due diagonali non esistono.

a

1	13	10	4	12	40
15	9	3	6	7	40
8	2	11	14	5	40
24	24	24	24	24	

Esagoni magici

Premessa

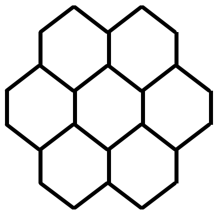
Un ***esagono magico*** di ordine «n» è una disposizione di numeri tra loro distinti in una tabella esagonale composta da «n» celle per ogni lato, in modo che la somma dei numeri in ciascuna delle tre direzioni possibili), abbia come somma la stessa costante magica.

Un ***esagono magico puro*** (o *normale*) ha il vincolo ulteriore di dover usare gli interi consecutivi da «1» a «$3n^2 - 3n + 1$» che è anche il numero delle celle.

Esaminiamo il primo esagono non banale, quello di ordine «n = 2» (schema [sc. 1]); l'esagono è costituito da «7» celle, ma non è in alcun modo possibile inserire nelle celle stesse i numeri da «1» a «7» in maniera tale da renderlo magico.

Le righe da considerare sono, infatti, tre, ma la somma dei primi «7» numeri interi equivale a «$^{(7\bullet 8)}/_2 = 28$», che non è divisibile per il numero delle righe orizzontali uguali a «3».

Costante magica: $M_{(3)} = \frac{28}{3} = 9,\overline{3}$

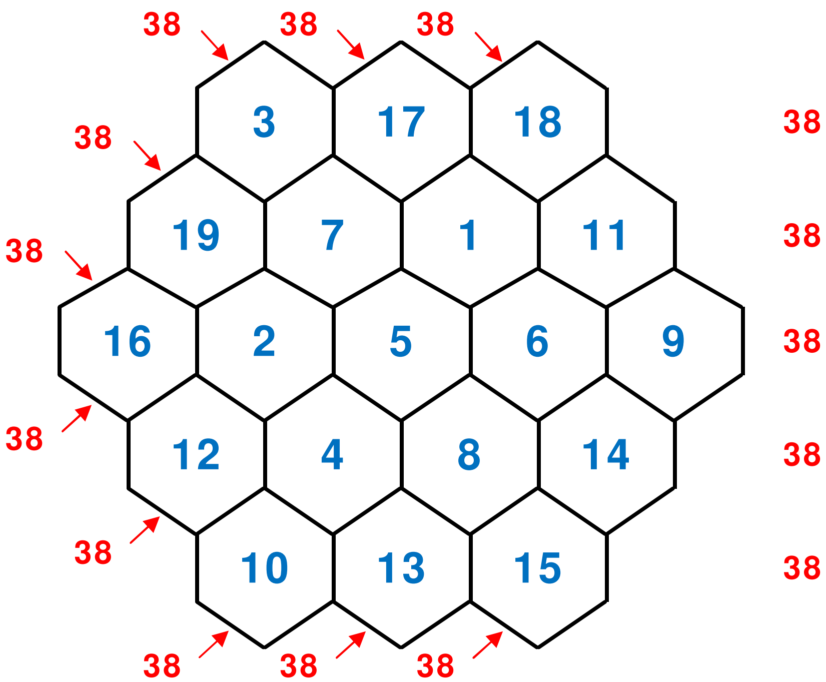


[sc. 1]

Esagono magico di ordine «n = 3»

Per poter ottenere *esagoni magici puri* occorre, pertanto, passare al successivo esagono, di ordine «n = 3», questo *esagono magico puro* è composto da «$3 \bullet n^2 - 3 \bullet n + 1 = 19$» celle ripartite su «$f_{(5)} = 2 \bullet n - 1 = 2 \bullet 3 - 1 = 5$» file; si deve, quindi usare la serie degli interi consecutivi «1 ÷ 19» la cui somma vale «$S_{(19)} = {}^{19 \bullet 20}/_2 = 190$» e, quindi, stavolta la costante magica è « $M_{(3)} = 38$», che è un numero divisibile esattamente per «5», per cui un *esagono magico* di ordine «n = 3» è teoricamente possibile, ed in effetti esiste realmente.

Costante magica: $M_{(5)} = \frac{190}{5} = 38$



Si può evidenziare una prima, significativa differenza rispetto ai *quadrati magici*; quest'ultimi hanno lo stesso numero di celle lungo le sue due direzioni, e le righe e le colonne, mentre nel caso dell'esagono magico sono differenti.

Ad esempio, l'*esagono di ordine* «n = 3» è composto da «19» celle, ripartite in «5» file orizzontali che hanno, considerate dall'alto al basso: 3, 4, 5, 4, 3, celle ciascuna.

L'esagono magico di ordine «n = 3» è un “prodotto” piuttosto recente: il primo a trattarlo è stato l'architetto tedesco **Ernst von Haselberg** (1827 – 1905), nel 1887; successivamente, è stato pubblicato più volte in diverse opere che trattano di *matematica ricreativa*.

[vedere anche: *Approfondimenti* – **Seconde precisazioni**, pagina 61]

l'esagono di ordine «n = 4» è composto da 37 celle, ripartite in sette file che hanno 4, 5, 6, 7, 6, 5 e 4 celle ciascuna; attenzione, però, ho parlato semplicemente di ***esagono*** e non di ***esagono magico***.

Stelle magiche

Premessa

In matematica si definisce, ***stella magica*** ad «n» punte, un poligono stellato, avente come ***simbolo di*** **Schläfli** $\{^{n}/_{2}\}$ con gli «n» vertici e le «n» intersezioni degli «n» lati munite di «2 • n» interi tale che le somme dei «4» numeri su ciascun lato coincidano; il valore di queste somme si dice *costante magica* o *somma magica* della stella.

Osservazioni

Per maggiori informazioni sul ***simbolo di*** **Schläfli** vedere: **La notazione di Schläfli** nella Dispensa dello stesso Autore *Antiche matematiche*, a pagina 68.

Si dice inoltre ***stella magica normale*** una tale configurazione che sia munita degli interi consecutivi da «1 a 2 • n»; la costante magica delle *stelle magiche* ad «n» punte è:

$$M(n) = \frac{1}{n} \bullet 2 \bullet \frac{2 \bullet n \bullet (2 \bullet n+1)}{2} = 4 \bullet n + 2$$

Infatti, i «2 • n» interi della stella magica sono interi consecutivi, quindi la loro somma corrisponde al «2n-*esimo*» numero triangolare, che è chiaramente dato da «$^{2 \bullet n\,(2 \bullet n + 1)}/_{2}$».

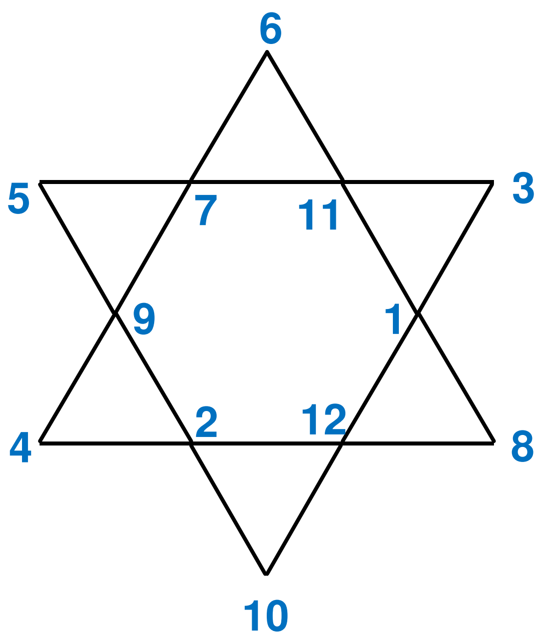
Moltiplicando per «n» la costante magica, ogni numero viene considerato due volte, e quindi la somma di tutti i numeri viene raddoppiata; da ciò si arriva facilmente alla formula sopra descritta.

Si verifica facilmente che non si riesce a costruire alcuna *stella magica* con meno di «6» punte; pertanto, le stelle magiche più semplici hanno «6» punte.

Per alcuni valori particolari di «n», si usano anche termini come o *esagramma magico* «n = 6» o *ettagramma magico* «n = 7», eccetera.

Nella stella di ordine «n = 6» (l'ordine di questo tipo di stella è dato dal numero «n» delle punte) rappresentata nello schema [Sc. 01], si ha:

$$M_{(6)} = 4 \bullet n + 2 = 4 \bullet 6 + 2 = 26$$



[Sc. 01]

6 + 7 + 9 + 4 = **26** 6 + 11 + 1 + 8 = **26** 5 + 7 + 11 + 3 = **26**
5 + 9 + 2 + 10 = **26** 4 + 2 + 12 + 8 = **26** 10 + 12 + 1 + 3 = **26**

Ammette «80» soluzioni.

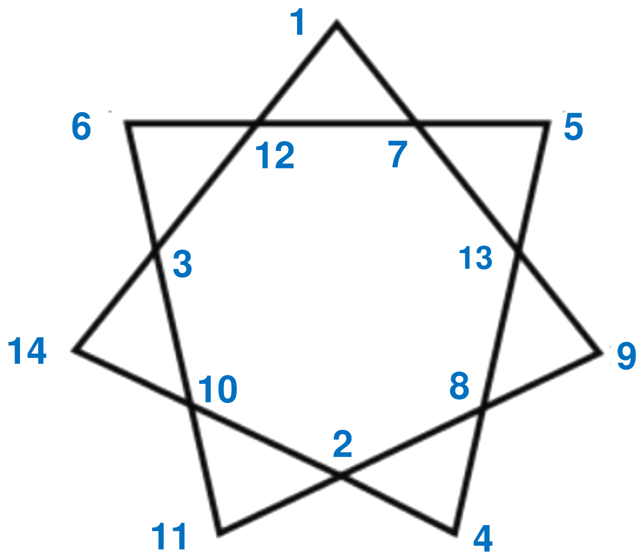
Una stella magica di ordine «n = 7»

Un *esagramma magico*, è formato da «14» fra e spigoli ed intersezioni; la somma dei numeri che compongono la serie e: «$^{14 \bullet 15}/_{2}$ = 105».

La costante magica, per l'ordine «n = 7», è:

$$M_{(7)} = 4 \bullet n + 2 = 4 \bullet 7 + 2 = 30$$

Questa *stella magica* può essere tracciata con un unico tratto continuo di penna.
Ha «72» soluzioni.



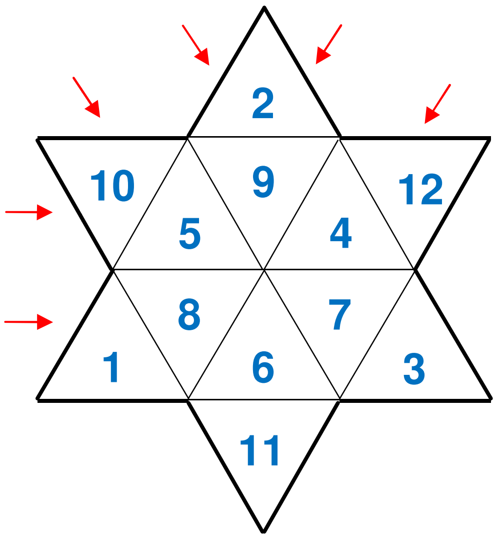
1 + 12 + 3 + 14 = **30**	1 + 7 + 13 + 9 = **30**	5 + 7+ 12 + 6 = **30**
5 + 13 + 8 + 4 = **30**	9 + 13 + 7 + 1 = **30**	9 + 8 + 2 + 11 = **30**
4 + 8 + 13 + 5 = **30**	4 + 2 + 10 + 14 = **30**	11 + 2 + 8 + 9 = **30**
11 + 10 + 3 + 6 = **30**	14 + 10 + 2 + 4 = **30**	14 + 3 + 12 + 1 = **30**
6 + 3 + 10 + 11 = **30**	6 + 12 + 7 + 5 = **30**	

Ammette «72» soluzioni.

Altri tipi di stelle magiche

La ***stella magica*** rappresentata nello schema [Sc. 02] dovrebbe essere definita più precisamente ***stella pseudo-magica*** perché ha più di una costante magica.

Anche in questo tipo di stella, si verifica facilmente che non si riesce a costruire alcuna *stella magica* con meno «6» punte; pertanto, anche in questo caso, le *stelle magiche* più semplici hanno «6» punte.



[Sc. 02]

10 + 2 + 12 + 3 + 11 + 1 = **39**
5 + 9 + 4 + 7 + 6 + 8 = **39**

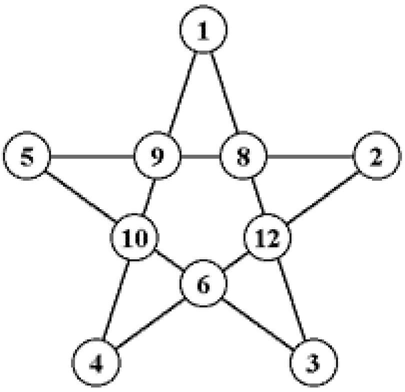
10 + 5 + 8 + 6 + 11 = **40**	2 + 9 + 5 + 8 + 1 = **25**
10 + 5 + 9 + 4 + 12 = **40**	2 + 9 + 4 + 7 + 3 = **25**
11 + 6 + 7 + 4 + 12 = **40**	3 + 7 + 6 +8 + 1 = **25**

Una stella quasi-magica

Le stelle ***quasi-magiche*** sono così chiamate perché non è possibile formarle con i numeri da «1» a «10»; è, infatti, necessario utilizzare i numeri da «1» a «12» omettendo, nell'esempio presentato, ed il «7» e l'«11».

Esiste, inoltre, una variante in cui si omettono i numeri e «2» e «6».

Sempre nell'esempio presentato nello schema sottostante, la somma magica è «24».



5 + 9 + 8 + 2 = **24**
1 + 8 + 12 + 3 = **24**

5 + 10 + 6 +3 = **24**
4 + 6 + 12 + 2 = **24**

1 + 9 + 10 + 4 = **24**
2 + 12 + 6 + 4 = **24**

Prima digressione

Premessa

Il ***quadrato di*** **Sator** è una celebre iscrizione a forma di griglia quadrata di tipo letterale di ordine «n = 5» (5 x 5) su cui sono incise le parole: SATOR, AREPO, TENET, OPERA, ROTAS, disposte in modo tale da formare una scritta doppiamente palindroma; ossia leggibile indifferentemente e da sinistra e da destra e dall'alto e dal basso.

Questo quadrato è visibile su moltissimi monumenti di tutta Europa, dalle rovine di **Cirencester** (***Inghilterra***) all'**Oppède** (***Francia***) al **Santiago di Compostela** (***Spagna***); in ***Italia*** il quadrato **del Sator** si trova, fra le altre località, su un lato e del **Duomo di Siena** (SI), (*Toscana*) e nel monastero **Certosa di Trisulti** (FR), (*Lazio*).

Quello e più celebre e più antico fu rivenuto nel 1925, inciso su una colonna degli scavi di **Pompei**; da qui il nome di ***latercolo pompeaiano*** con cui è spesso citato il ***quadrato di*** **Sator**; il reperto risalirebbe, pertanto, a circa duemila anni fa (Pompei fu sepolta dall'eruzione del Vesuvio nel 79 d.C.).

Il significato della frase riportata da questo quadrato è di dubbia interpretazione; alcuni studiosi hanno proposto una interpretazione letterale del tipo "***il seminatore*** **Arepo** (nome proprio) ***tiene con cura le ruote***", ma altri ritengono molto più probabile che il *seminatore* di cui si parla sia un riferimento religioso al **Creatore**.

È stata, pertanto avanzata, oltre a svariate altre interpretazioni, anche l'ipotesi che il reale significato possa essere "**Dio** ***dirige e giudica l'intero universo***"

Il **Quadrato del Sator** sarebbe diventato, nel Medioevo, una sorta di sigillo dei ***Cavalieri Templari***.

a

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Nel ***libro di*** **Abramelin** vi sono presenti diversi altri ***quadrati magici cabalistici***, fra i quali uno particolarmente simile al precedente (capitolo XIX, pentacolo 9).

a

S	A	L	O	M
A	R	E	P	O
L	E	M	E	L
O	P	E	R	A
M	O	L	A	S

Il quadrato magico di Villa Albani

Informazioni

Nella Villa Albani di Roma è presente un quadrato magico di ordine «n = 9» inciso sul marmo, sopra il quale è posta la scritta "QVADRATUS MAXIMVS.

Sotto al quadrato è riportata una descrizione in latino, con il nome dell'autore e l'anno di composizione (1766).

La costante magica, cioè la somma dei numeri di tutte le righe, colonne e diagonali maggiori è «$M_{(9)}$ = 369».

Villa Albani

									369
15	58	29	34	63	49	74	41	6	369
7	27	31	81	23	76	80	18	**26**	369
38	8	30	71	47	20	21	78	**56**	369
73	19	25	42	10	33	50	65	**52**	369
22	55	72	1	45	60	28	16	**70**	369
79	35	39	66	2	48	17	24	**59**	369
14	64	69	12	77	3	51	68	**11**	369
46	36	61	53	40	43	4	54	**32**	369
75	67	13	9	62	37	44	5	**57**	369
369	369	369	369	369	369	369	369	369	369

Gli ipercubi

Premessa

In matematica, un ***cubo magico*** è l'equivalente tridimensionale di un quadrato magico.

Un ***cubo magico normale*** è un cubo magico in cui la costante magica può essere trovata come somma dei numeri sia e di ogni riga e di ogni colonna e delle quattro diagonali maggiori sia di ogni altra diagonale interna del cubo; se, per contro, la somma dei numeri delle diagonali interne del cubo non corrisponde alla costante magica.in caso contrario, viene chiamato ***cubo magico semi-normale*** o **cubo di Andrews**.

La formula che consente di trovare la costante magica «$M_{3(n)}$» nelle tre dimensioni, di un cubo magico di ordine «n», se esso è costituito da tutti i numeri da «1 a n^3», è:

Costante magica: $M_{3(n)} = \frac{n \bullet (n^3+1)}{2} = \frac{(n^4 - n)}{2}$

Se, in più, anche la somma dei numeri di ogni diagonale interna corrisponde alla costante magica del cubo, esso viene chiamato cubo magico perfetto;

L'ipercubo W. T. – C. B.

Il matematico tedesco **Walter Trump** e l'informatico francese **Christian Boyer**, hanno trovato il *cubo magico perfetto* di ordine «n = 5» (5 x 5 x 5), il più piccolo dei cubi magici, tormento per più di un secolo, dei matematici i quali erano arrivati persino a dubitare della sua esistenza.

Costante magica: $M_{3(5)} = \frac{5 \bullet (5^3+1)}{2} = \frac{(5^4 + 5)}{2} = 315$

Rappresentazione bidimensionale dei cinque strati
del *Cubo magico perfetto* di matrice [5 x 5 x 5].

La grigia «**a**» è quella superiore, e procedendo verso il basso si trovano in successione, l'una esattamente sotto l'altra, le griglie e «**b**» e «**c**» e «**d**» e «**e**».

a

25	16	80	104	90
115	98	4	1	97
42	111	85	2	75
66	72	27	102	48
67	18	119	106	5

b

91	77	71	6	70
52	**64**	117	69	13
30	118	21	123	23
25	39	92	44	114
116	17	14	73	95

c

47	61	45	76	**86**
107	43	38	33	**94**
89	68	**63**	58	**37**
32	93	88	83	**19**
40	50	81	65	**79**

d

31	53	112	109	10
12	82	34	87	100
103	3	105	8	96
113	57	9	**62**	74
56	120	55	49	35

e

121	108	7	20	59
29	28	122	125	11
51	15	41	124	84
78	54	99	24	60
36	110	46	22	101

Tre file
prese come esempio

25 + 64 + 63 + 62 + 101 = **315**

67 + 116 + 40 + 56 + 36 = **315**

31 + 53 + 112 + 109 + 10 = **315**

86 + 94 + 37 + 19 + 79 = **315**

Come nel caso dei *quadrati magici*, un cubo *P*-multimagico è tale che, elevando tutti i suoi numeri ad una potenza «1 ≤ k ≤ P», esso rimanga magico.

In particolare, un *cubo bimagico* rimane magico se si elevano tutti i suoi numeri al quadrato, un *cubo trimagico* rimane magico se si elevano tutti i suoi numeri al quadrato o al cubo, un *cubo tetramagico* rimane magico se si elevano tutti i suoi numeri alla seconda, terza o quarta potenza.

Il precedente cubo magico normale può essere rappresentato anche con un aspetto tridi mensionale; questo cubo è stato scoperto e da **Walter Trump** e da **Christian Boyer** nel «13/11/2003»

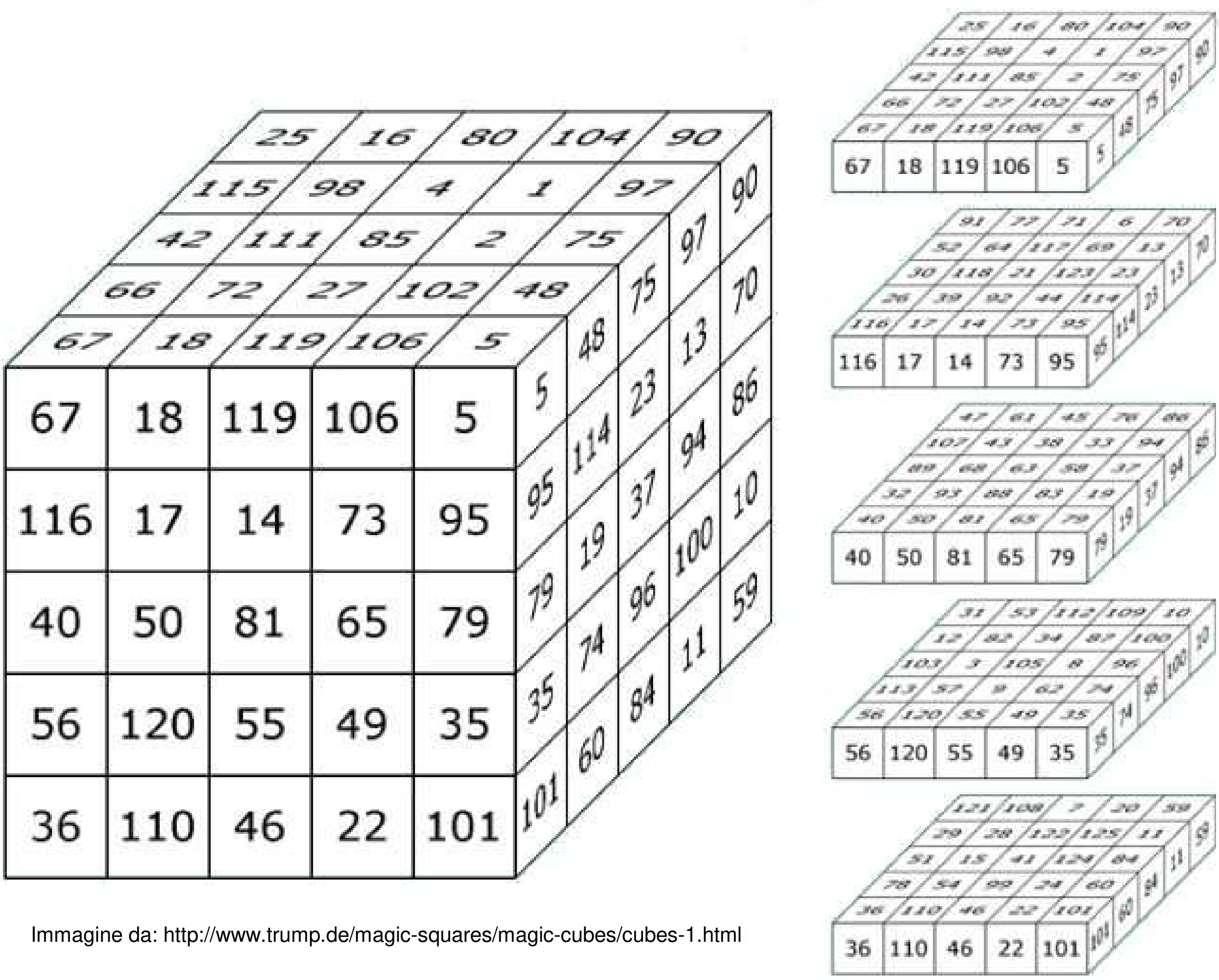


Immagine da: http://www.trump.de/magic-squares/magic-cubes/cubes-1.html

Questo cubo di ordine (n = 5) [5 x 5 x 5] è composto da tutti i numeri «1 ÷ 125»; la somma dei cinque numeri in ciascuna delle 25 righe, 2 colonne, 25 pilastri, 30 diagonali, 4 triagonali (diagonali spaziali) equivale alla costante magica «$M_{(5)}$ = 315».

Cronologia dei cubi magici normali

Ordine	Esiste	Smentito o scoperto da	Data
3	no	John Hendricks *	1972
4	no	Richard Schroeppel	1972
5	si	Walter Trump Christian Boyer	Novembre 2003
6	si	Walter Trump	Settembre 2003
7	si	Andrew H. Frost	1866
8	si	Gustavus Frankenstein	1875
N > 8	Sono state trovate soluzioni singole da diversi autori.		
2K > 4	si	Soluzione generale di Mitsutoshi Nakamura	Giugno 2004

* probabilmente la prima confutazione era già stata fatta prima

Quando il e pittore e matematico tedesco **Gustavus Frankenstein** (1828 – 1893), scoprì il primo *cubo magico* di ordine «n = 8», con somma costante «2052», scrisse in proposito: *Questa scoperta mi ha dato una soddisfazione superiore a quella che avrei provato se avessi scoperto una miniera d'oro nel mio giardino*.

Sono stati scoperti anche diversi altri *cubi magici normali* di ordine e «n = 9» e «n = 11» e «n = 12», mentre non si conosce alcun *cubo normale* di ordine «n = 10», e non si sa nemmeno se esista; è' stato, invece, dimostrato che non esistono *cubi magi normali* di ordine e «n = 2» e «n = 3» e di «n = 4».

In seguito si estese la ricerca a ***ipercubi*** di dimensione «m» ed ordine «n», ognuno composto da «n^m» numeri interi.

I cubi magici semi-perfetti

In matematica, un ***cubo magico semi-perfetto***, a volte chiamato anche **cubo di Andrews**, è un cubo magico in cui la somma dei numeri delle diagonali interne del cubo non corrisponde alla costante magica.

Un cubo magico semi-perfetto di ordine (n = 3) ha come costante magica «$M3_{(3)}$ = 42», e il suo elemento centrale è «14».

Hendricks dimostrò che esistono solo «4» cubi magici semi-perfetti di questo tipo (escluse e le rotazioni e le simmetrie), mostrati appresso.

Cubi magici semi-perfetti (n = 3)

Primo cubo (Il 1° strato è il più alto)

1° strato		
4	12	26
11	25	6
27	5	10

2° strato		
20	7	15
9	**14**	19
13	21	8

3° strato		
18	23	1
22	3	17
2	16	24

Secondo cubo (Il 1° strato è il più alto)

1° strato		
6	10	26
11	27	4
25	5	12

2° strato		
20	9	13
7	**14**	21
15	19	8

3° strato		
16	23	3
24	1	17
2	18	22

Terzo cubo (Il 1° strato è il più alto)

1° strato		
4	18	20
17	19	6
21	5	16

2° strato		
26	1	15
3	**14**	25
13	27	2

3° strato		
12	23	7
22	9	11
8	10	24

Quarto cubo (Il 1° strato è il più alto)

1° strato		
6	16	20
17	21	4
19	5	18

2° strato		
26	3	13
1	**14**	27
15	25	2

3° strato		
10	23	9
24	7	11
8	12	22

Cubo magico semi-perfetto (n = 4)

Cubo magico semi-perfetto di ordine (n = 4) e costante magica «M(4) = 130»
(Il 1° strato è il più alto)

1° strato			
60	37	12	21
13	20	61	36
56	41	8	25
1	32	49	48

2° strato			
7	26	55	42
50	47	2	31
11	22	59	38
62	35	14	19

3° strato			
57	40	9	24
16	17	64	33
53	44	5	28
4	29	52	45

4° strato			
6	27	54	43
51	46	3	30
10	23	58	39
63	34	15	18

Aspetti di tre cubi magici quasi-perfetti
e di ordine (n = 4) e costante magica «M(4) = 130»
Walter Trump 2 gennaio 2004

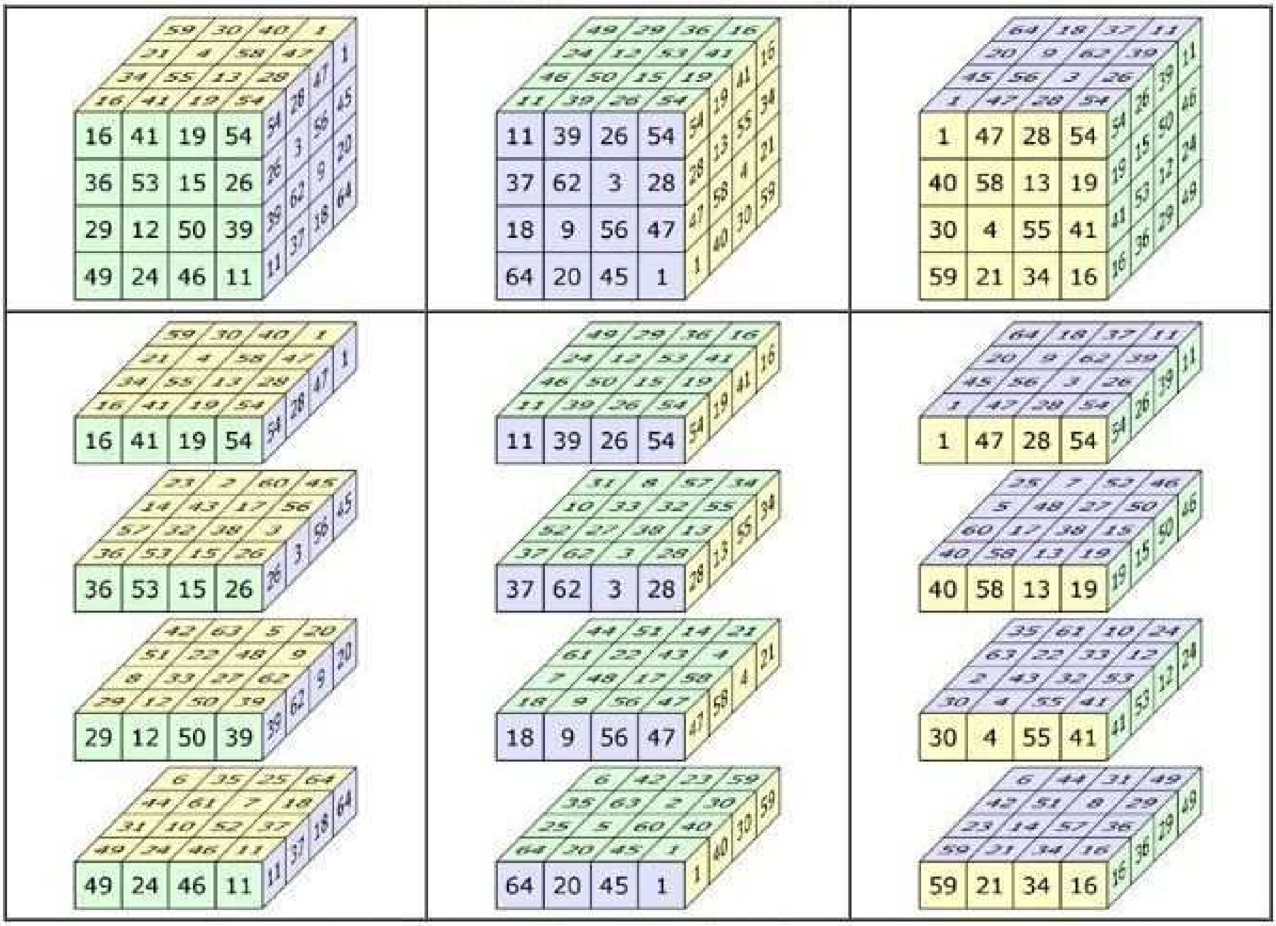
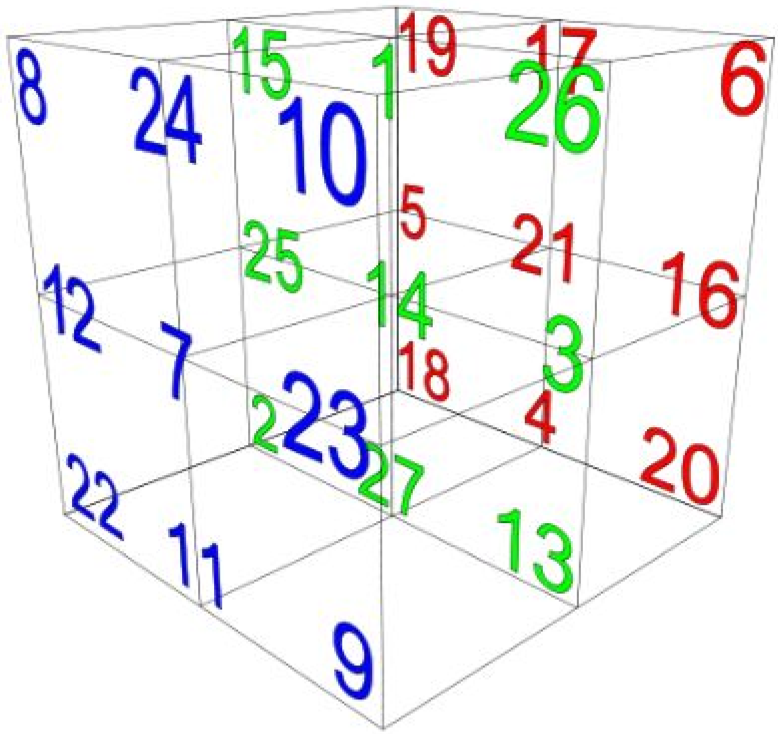


Immagine da: http://www.trump.de/magic-squares/magic-cubes/cubes-1.html

Cubo magico semplice

Informazioni

Appresso è riportato un esempio di ***cubo magico semplice*** di ordine (n = 3) [3 x 3 x 3] e costante magica «$M3_{(3)} = 42$»; in questo cubo nessuna delle sei facce è un quadrato magico perfetto per cui non può essere considerato un cubo magico normale.



Cubi bimagici

Informazioni

In matematica, un ***cubo bimagico*** è un cubo magico normale che rimane magico normale anche quando tutti i suoi numeri sono elevati al quadrato.

Esso è l'equivalente tridimensionale di un quadrato magico, ovvero lo schieramento di un numero di interi all'interno di un modello (n x n x n) tale che la somma dei numeri di ogni possibile riga, di ogni possibile colonna e delle quattro diagonali maggiori sia un numero costante, detto **costante magica** del cubo, indicata con $M3_{(n)}$.

Se un cubo magico di ordine «n» è costituito da tutti i numeri da «1» a «n^3» allora ha una costante magica, pari a.

$$M3_{(n)} = \frac{n \bullet (n^3 + 1)}{2}$$

Se, in più, anche la somma dei numeri di ogni diagonale interna corrisponde alla costante magica del cubo, esso viene chiamato cubo magico perfetto; in caso contrario, viene chiamato cubo magico semi-perfetto.

Il 20 gennaio 2003, l'informatico francese **Christian Boyer** scoprì un ***cubo bimagico*** di ordine (n = 16), che era un cubo magico perfetto, ma il cui quadrato era un cubo magico semi-perfetto; poco dopo, il 23 gennaio 2002, Boyer trovò un altro cubo bimagico, sempre di ordine (n = 16), anch'esso perfetto, ma che al quadrato diventava semi-perfetto).

Il 27 gennaio 2003, scoprì un cubo bimagico di ordine (n = 32), che, a differenza dei primi due, rimaneva perfetto sia normalmente che al quadrato.

Il 3 febbraio 2003, infine, trovò anche un cubo bimagico di ordine (n = 27), perfetto normalmente, ma che al quadrato diventava semi-perfetto.

I cubi magici di ordine (n = 16) di Boyer rimangono così i più piccoli cubi bimagici conosciuti, mentre il cubo magico di ordine (n = 32) resta l'unico *cubo bimagico perfetto*

Lo gnomone

Premessa

Un quadrato magico normale di ordine (n = 4) [4 x 4] è detto ***gnomone*** se la somma dei numeri dei quadrati [2 x 2] che si trovano ai quattro angoli ha lo stesso valore della costante magica.

Trattazione

Sulla facciata della **Sagrada Familia**, la chiesa più importante della Catalogna ed una delle chiese più famose al mondo, si trova un *crittogramma* fatto di numeri interi conosciuto come o Il **quadrato magico di Subirachs** o Il **quadrato magico della Sagrada Familia**; vedi anche: **Il quadrato magico di Subirachs**, a pagina 25.

Questo quadrato magico si trova sulla ***facciata della Passione***, il cui impianto fu ideato e realizzato dallo e scultore e pittore e scenografo ed incisore e critico d'arte spagnolo **Josep Maria Subirachs i Sitjar** (1927 – 2014)

Di ordine (n = 3) e di costante magica «$M_{(4)}$ = 33» è anche uno **gnomone** perché i quadrati [2 x 2] agli angoli (ed anche il quadrato [2 x 2] centrale) hanno tutti la somma dei numeri uguale a «33», pari alla costante magica.

1 + 14 + 11 + 7 = 33

14 + 4 + 6 + 9 = 33

7 + 6 + 10 + 10 = 33

8 + 10 + 13 + 2 = 33

10 + 5 + 3 + 15 = 33

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Questa particolarità era già stata indicata in - **Il quadrato magico di Subirachs** -, a pagina 25, qui è stata posta in maggiore evidenza.

Anche il quadrato magico normale chiamato o la **Melencolia I** o il **quadrato magico di Dürer**, di ordine (n = 3) e di costante magica «$M_{(4)}$ = 34», possiede le caratteristiche di uno ***gnomone***; l'opera, una delle incisioni più famose in assoluto, è conservata nella ***Staatliche Kunsthalle*** di ***Karlsruhe***.

16 + 3 + 5 + 10 = 34

2 + 13 + 11 + 8 = 34

10 + 11 + 6 + 7 = 34

9 + 6 + 4 + 15 = 34

7 + 12 + 14 + 1 = 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Questa particolarità era già stata indicata in - **La Melencolia I** -, a pagina 24, qui è stata posta in maggiore evidenza.

Un ben e noto ed antico ***gnomone*** fu trovato nel tempio di ***Parshvanath Jain*** a **Khajuraho**, è datato al «**X** secolo» e si riferisce al **Chautisa Yantra**.

La sua costante magica è «$M_{(3)}$ = 34», pari alla somma di ogni sotto quadrato, ovvero ogni quadrato [2 x 2] contenuto in esso.

7 + 12 + 2 + 13 = 34

1 + 14 + 8 + 11 = 34

13 + 8 + 3 + 10 = 34

16 + 3 + 9 + 6= 34

10 + 5 + 15 + 4 = 34

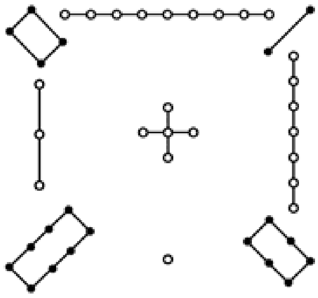
7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Curiosità

Lo Shu

Il ***quadrato Lo Shu*** è un *quadrato magico normale* di ordine «n = 3», cioè una matrice di (3 x 3) contenente tutti gli interi da «1 ÷ 9», senza ripetizioni, disposti in modo tale che sommando i numeri sulle diverse e righe e colonne e diagonali si ottenga sempre lo stesso valore, che deve essere «$^{(1+2+...+8+9)}/_{3}$ = 15».

La costante magica è, infatti: $M_{(3)} = \frac{3 \bullet (3^2+1)}{2} = 15$



洛書

			a	15
4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15
15	15	15	15

Qualche particolarità

- La semisomma dei numeri simmetrici, rispetto alla casella centrale dà «5», come il numero centrale del quadrato magico

Ad esempio:

$$\frac{1+9}{2} = 5, \quad \frac{8+2}{2} = 5, \quad \frac{3+7}{2} = 5, \quad \frac{4+6}{2} = 5$$

- Se si moltiplica il numero centrale «5» per l'ordine del quadrato magico, cioè (n = 3), si ottiene il valore della costante magica, cioè «$M_{(3)}$ = 15»:

$$5 \bullet 3 = 15$$

- Se sl moltiplica il numero centrale per l'ordine, elevato al quadrato, si ottiene la somma totale dei numeri che compongono il quadrato magico:

$$5 \bullet 3^2 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9 \bullet (9+1)}{2} = 45$$

Queste formule valgono per qualsiasi quadrato magico di ordine dispari; pertanto anche per griglie: (5 × 5), (7 × 7) e così via.

Prendiamo, come esempio, il quadrato magico della «**Luna** ☽» composto in una griglia di (9 x 9) con i numeri che vanno da «1» ad «81», a pagina 77.

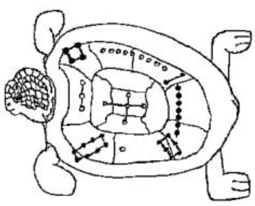
Esso è un quadrato magico e di ordine (n = 9) e di costante magica «$M_{(9)}$ = 369», nel quale il valore della casella centrale è di «41».

41 • 9 = 369 (è il valore della costante magica «$M_{(9)}$»).
41 • 9^2 = 3 321 (è il valore della somma dei primi «81» numeri interi positivi).

Infatti, la somma de primi «81» numeri interi positivi (dall'«1» all'«81») è pari a:

$$S_{(81)} = \frac{81 \bullet (81+1)}{2} = 3\,321$$

Nativo della Cina, sulla sua origine sono fiorite svariate leggende, una delle quali rimanda al 16° secolo a.C., durante la **dinastia Shang** (商朝[T], *Shāngcháo*[P]); in quel periodo, le copiose piogge che cadevano sui monti avrebbero provocato disastrose piene del fiume **Giallo** (黃河[T], 黄河[S]), causate, così si credeva, dall'ira del dio del fiume, che distruggevano e abitazioni e raccolti.



Narra, sempre la leggenda riportata in un libro intitolato ***Yih King***, che la popolazione compì diversi sacrifici al dio per far cessare i disastrosi eventi, ma dopo ogni sacrificio dal fiume emergeva una tartaruga che sembrava sdegnare le offerte, indizio evidente che il dio fiume le rifiutava, mentre la sua furia non si placava.

Solo dopo vari tentativi un bambino si accorse che quella tartaruga aveva sul carapace dei strani segni e, pertanto, un pescatore venne incaricato e di catturare la tartaruga e di portarla ai saggi del villaggio.

Questi si resero subito conto che sul guscio non vi erano dei semplici segni, ma vi erano dei simboli che indicavano dei numeri disposti all'interno di una griglia quadrata di (3 x 3) in modo tale che i numeri collocati e sulle tre righe e sulle tre colonne e sulle due diagonali davano sempre lo stesso risultato; il «15».

Quei numeri formavano, in ultima analisi, un *quadrato magico normale* e questo significava che il dio richiedeva proprio un sacrificio di «15 *entità*», infatti, una volta adempiuto al suo volere, le piene cessarono; fu così che questo particolare quadrato magico venne chiamato **Lo Shu**.

Questa configurazione è stata considerata un simbolo dell'armonia universale: i numeri da «1» (l'inizio di tutte le cose) a «9» (il completamento) sono considerati bene auguranti, soprattutto il «5» centrale.

La costante magica «15» si interpreta come la durata di ciascuno dei «24 *cicli*» dell'anno solare cinese; l'alternarsi dei numeri e pari e dispari sulle caselle periferiche si interpreta come l'alternarsi armonioso e di **yang** e di **yin**.

Nel **Lo Shu** i numeri *dispari* rappresentano l'elemento maschile **yang**, mentre i numeri *pari* rappresentano l'elemento femminile **yin**.

Nell'antica Cina ci si ispirava a questo quadrato per progettare e templi e città, suddivise in settori di (3 x 3).

Una costruzione del «Lo Shu»

Esiste un altro modo semplice, oltre a quello presentato nel **Il primo metodo**, a pagina 4, per costruire un *quadrato magico normale* di ordine «n = 3»; lo presento solo ora perché non è un metodo risolutivo generale, ma vale soltanto per *quadrati magici normali* di ordine (n = 3).

a) In una griglia (3 x 3) si scrivono i numeri, uno per casella, in modo ordinato e da destra a sinistra e dal basso all'alto.

Osservazioni

Ho utilizzato il procedimento *e da destra a sinistra e dal basso all'alto*, e non quello forse più naturale *e da sinistra a destra e dall'alto al basso*, perché in questo modo ottengo il quadrato magico normale **Lo Shu**.

b) Si spostano tutti i numeri nella casella adiacente simulando una rotazione oraria con perno sul numero centrale «5» che resta fermo.

c) Si inverte la posizione dei numeri posti agli estremi di ognuna delle due diagonali e la «6, 5, 4» e la «8, 5, 2»; il «**6**» si scambia col «**4**», mentre l'«**8**» si scambia col «**2**».

d) Si ottiene, infine, un *quadrato magico normale*, griglia «**d**», di ordine «n = 3» che presenta come disposizione equivalente quella di **Lo Shu**.

a

9	8	7
6	5	4
3	2	1

b

6	9	8
3	5	7
2	1	4

c

6	9	8
3	5	7
2	1	4

d

			15
4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15
15	15	15	15

Lo Shu è utilizzato, dal 1982, quale simbolo della professione *ragionieristica*; stilizzato con forature analoghe a quelle in uso nelle prime schede perforate dei calcolatori elettronici ed iscritto in una forma circolare.

Osservazioni

Ragionieristico è un orribile termine, che purtroppo si trova nei dizionari, che significa: relativo od alla ragioneria od ai ragionieri.

Le proprietà più interessanti del **Lo Shu** sono collegate alla teoria dello **Yin-Yang**, secondo la quale ogni cosa deriva dall'armoniosa opposizione di due originali forze cosmiche, lo **Yin** e lo **Yang**, rappresentate da migliaia di anni nella forma circolare dell'antica saggezza.

Yang, per i cinesi, è la forza maschile, sorgente di calore, di luce e di vita, sotto l'influenza del Sole; **Yin** è invece la forza femminile, che si sviluppa al buio, al freddo e nell'immobilit´a, sotto l'influenza della Luna.

Nel **Lo Shu** i numeri pari rappresentano l'elemento maschile yang, mentre i numeri dispari rappresentano l'elemento femminile yin. Il numero 5 rappresenta la Terra e gli altri numeri rappresentano e i punti cardinali e le stagioni.

Si riporta, inoltre, una tabella in cui sono riportati alcuni dei collegamenti, stabiliti nell'antica Cina, con i numeri dello **Shu**.

Collegamenti stabiliti, nell'antica Cina,
con i numeri del quadrato magico Lo Shu

Numeri del Lo Shu	Punti cardinali	Colori	Elementi	Stagioni
1	Nord	Bianco	Acqua	Inverno
2	Sud-Ovest	Nero	Fuoco	
3	Est	Blu	Legno	Primavera
4	Sud-Est	Verde	Metallo	
5	Centro	Giallo	Terra	
6	Nord-Ovest	Bianco	Acqua	
7	Ovest	Rosso	Fuoco	Autunno
8	Nord-Est	Bianco	Legno	
9	Sud	Porpora	Metallo	Estate

Il Kubera-Kolam

Il Kubera-Kolam, una pittura del pavimento usata in India, è sotto forma d'un quadrato magico e di ordine (n = 3) e di costante magica «$M_{(3)}$ = 72»; è essenzialmente lo stesso del quadrato del **Lo Shu**, ma con il numero «19» aggiunto ad ogni suo numero.

	x		72
23	28	21	72
22	24	26	72
27	20	25	72
72	72	72	72

Ancora sul quadrato magico normale (n = 3)

Sappiamo che la costante magica è «$M_{(3)}$ = 15».

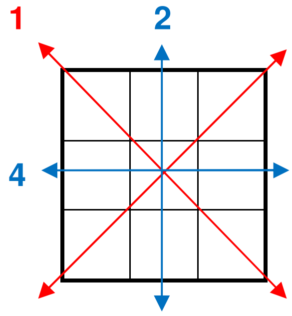
Sappiamo che dobbiamo utilizzare la successione di numeri che va da «1» a «9».

Costatato che ed ogni riga ed ogni colonna ed ogni diagonale è costituita da tre cifre, troviamo tutte le terne la cui somma è «15»:

1 9 5, 186	due terne
2 9 4, 2 8 5, 2 7 6	tre terne
3 8 4, 3 7 5	due terne
4 9 2, 4 8 3, 4 6 5	tre terne
5 9 1, 5 8 2, 5 7 3, 5 6 4	*quattro terne*
6 8 1, 6 7 2, 6 5 4	tre terne
7 6 2, 7 5 3	due terne
8 6 1, 8 5 2, 8 4 3	tre terne
9 5 1, 9 4 2	due terne

Dallo schema «**a**» che nella griglia (3 x 3) vi sono quattro terne e che l'unica cifra presente nel gruppo di quattro terne è la cifra «5»; quest'ultima deve pertanto occupare la casella centrale.

a



Sappiamo che abbiamo quattro coppie di numeri la cui somma è «10»; due composte da cifre pari e «1 - 9» e «3 - 7», due composte da cifre dispari e «2 - 8» e «4 - 6».

A prima vista, e solo a prima vista, ci si presentano due possibilità: posizionare e le cifre dispari «**D**» nelle caselle di spigolo e le cifre pari «**P**» nelle caselle mediane (schema «**b**»), posizionare e le cifre pari nelle caselle di spigolo e le cifre dispari nelle caselle mediane (schema «**c**»).

Le cifre di ogni copia, sia essa composte da cifre pari sia essa composta da cifre dispari, deve, devono essere inserite nelle caselle che si trovano in posizione opposta rispetto alla casella dove è presente la cifra «5»

Analizzando lo schema «b», si può, però, notare che sia nelle righe più esterne sia nelle colonne più esterne vi sarebbero due cifre dispari ed una cifra pari che sommate non possono mai fornire un numero dispari qual'è la costate magica pari a $M_{(3)}$ = 15.

Lo schema corretto è, pertanto, quello «**c**» in cui le cifre dispari «**D**» sono posizionate nelle caselle di spigolo e le cifre pari «**P**» sono posizionate nelle caselle mediane.

b

D	**P**	**D**
P	**5**	**P**
D	**P**	**D**

c

P	**D**	**P**
D	**5**	**D**
P	**D**	**P**

Da notare che, sempre perché non vi siano mai due cifre dispari o nella stessa riga o nella stessa colonna o nella stessa diagonale (nel qual caso la somma delle proprie cifre darebbe un numero pari), le cifre dispari devono essere poste nelle caselle centrali e delle righe e delle colonne esterne in modo da formare, con la casella centrale in cui è presente il «5», una croce.

Le cifre pari, pertanto, devono essere poste nelle caselle d'angolo come indicato nello schema «**c**».

Negli schemi e «1°» e «2°» e «3°» e «4°» sono state evidenziate, in altrettanti esempi, e in rosso e in verde, o le righe o le colonne o le diagonali nelle quali la somma delle loro cifre, nel caso non si posizionassero tutte le cifre pari nelle caselle d'angolo, darebbe un numero pari.

1°

P	P	**D**
D	**5**	D
P	P	**D**

2°

P	**P**	D
P	**5**	P
D	**D**	**D**

3°

P	**D**	**P**
D	**5**	D
D	**P**	P

4°

P	P	**D**
D	**5**	D
P	P	**D**

Una volta stabilita la posizione delle cifre e pari e dispari possiamo procedere speditamente inserendo le cifre pari, di ogni coppia la cui somma è uguale a «10», nelle caselle diametralmente opposte alla casella in cui vi è il «**5**».

Terminiamo posizionando le cifre dispari in modo tale che la somma delle cifre all'interno delle caselle e di ogni riga e di ogni colonna sia uguale a «15».

d

4	D	2
D	5	D
8	D	6

Si può invertire o il «4» con il «6» o l'«8» con il «2».

c

4	9	2
3	5	7
8	1	6

La posizione delle cifre dispari è ora vincolata

Inoltre

Successivamente all'avanzamento degli strumenti matematici a nostra disposizione, sono state trovate numerose proprietà e particolarità legate ai quadrati magici; elenchiamo qui di seguito quelle più interessanti.

A meno di considerare *uguali* i *quadrati magici normali* che sono ottenibili l'uno dall'altro tramite e rotazioni e riflessioni (applicando cioè una relazione di equivalenza nell'insieme dei quadrati magici normali), sappiamo che esistono solo:

a) un solo quadrato di ordine «n = 1» (costituito solamente dal numero 1!).
b) nessun quadrato di ordine «n = 2».
c) solamente *un* quadrato di ordine «n = 3».
d) i quadrati di ordine «n = 4» sono «880», determinati nel **XVII** secolo dl matematico francese **Bernard Frénicle de Bessy** (1605 – 1675).
e) i quadrati di ordine «n = 5» sono «275 305 224», elencati utilizzando moderni metodi di calcolo nel 1973

Osservazioni

Per rimanere nell'ambito e della cabala e della numerologia, è interessante notare che la somma dei numeri interni di un *quadrato magico normale* di ordine «n = 6» è pari a «$^{36 \cdot (36+1)}/_{2}$ = 666», *numero diabolico* per eccellenza, noto come ***numero della bestia***.

Nel 2001 è stato presentato il primo esempio di quadrato pentamagico; esso ha ordine (n = 5) e numero magico «$M_{(5)}$ = 1 024»; non si conoscono esempi di *quadrati esamagici*, o in generale di *quadrati multimagici* relativi a «k > 5».

Il matematico francese **Bernard Frénicle de Bessy** (1605 *circa* – 1675), amico del e filosofo e matematico francese **René Descartes** (1596 – 1650) noto come **Cartesio** (**Renato Cartesio** in italiano, **Renatus Cartesius** in latino) e del e matematico e magistrato francese **Pierre de Fermat** (1601 – 1665), riuscì a calcolare il numero dei *quadrati magici normali* di ordine «n = 4» e costante magica «$M_{(4)}$ = 880».

Si dovette invece attendere l'avvento del computer per allargare l'indagine a quadrati magici di ordine superiore e scoprire così, nel 1973, che i quadrati magici di ordine «n = 5» sono «$N_{(5)}$ = 275 305 224».

Ancora oggi non è noto il numero preciso dei quadrati magici di ordine «n = 6», ma secondo le più recenti indagini, dovrebbero essere circa «$N_{(6)} = (1{,}774\,5 \pm 0{,}001\,6) \bullet 10^{19}$».

Resta comunque da risolvere il problema più generale: trovare la regola che consenta di determinare il numero di quadrati magici di un dato ordine.

Impossibile, per ora, anche solo immaginare quanti quadrati unici possano essere costruiti in un quadrato di ordine «n = 7».

L'alchimista e astrologo e esoterista e filosofo tedesco Heinrich **Cornelio Agrippa** di ***Nettesheim*** (1486–1535), nella sua opera più celebre, il ***De Occulta Philosophia***, presenta un *compendio* delle conoscenze indispensabili al mago rinascimentale, fortemente influenzata e dal neoplatonismo e dall'astrologia e dalla *Kabbalah*, con velleità operative e cerimoniali.

L'opera fu scritta con la revisione del dotto ed abate ed esoterista e storico e scrittore e lessicografo ed astrologo ed umanista e crittografo ed occultista tedesco **Giovanni Tritemio** (1462 – 1516), dal latino **Johannes Trithemius**, pseudonimo umanista di **Johann Heidenberg**; per **Agrippa**, la matematica è arte magica per eccellenza.

Nel manoscritto del 1510 non compaiono tuttavia i quadrati magici, che saranno inseriti solo più tardi, nel lungo periodo di revisione dell'opera che precedette l'edizione a stampa del 1533.

Nell'edizione del 1533 i quadrati magici compaiono nel secondo libro, dedicato alla magia celeste, cioè al potere delle stelle e dei pianeti; **Agrippa** fornisce la descrizione in chiave planetaria, di ogni *quadrato magico*, secondo il seguente schema, definendoli: *tavole sacre dei pianeti e dotate di grandi virtù, poiché rappresentano la ragione divina, o forma dei numeri celesti*.

Ordine «n = 3»*: quadrato di Saturno*

Ordine «n = 4»*: quadrato di Giove*
Ordine «n = 5»*: quadrato di Marte*
Ordine «n = 6»*: quadrato del Sole*
Ordine «n = 7»*: quadrato di Venere*
Ordine «n = 8»*: quadrato di Mercurio*
Ordine «n = 9»*: quadrato della Luna.*

Osservazioni

A quel tempo era in auge la teoria eliocentrica che vedeva la Terra al centro dell'universo; inoltre, si conoscevano soltanto cinque pianeti oltre la Terra: mercurio, venere, marte, giove, saturno.

Un quadrato magico cinese

In India è stata ritrovata una griglia del 1600 dall'aspetto familiare.

L'archeologo **Narayanamoorthy** ha scoperto che gli indiani del **XVII** secolo sapevano *costruire* quelli che ora chiamiamo ***quadrati magici***.

All'interno di «9 celle» erano stati inseriti i numeri da «1» a «9» nell'antica lingua Tamil**,** i quali, se sommati in qualsiasi direzione, danno come risultato «15».

Secondo le credenze indù, ogni dio ha un numero e il numero del dio e della guerra e della vittoria **Lord Murugan**, noto anche come Kartikeya (che si pronuncia: Kaa-rrttih-Ken- Yuw), a cui il tempio è dedicato, è il numero «6», proprio la somma delle cifre che compongono il «15».

Non chiedetemi come erano posizionate le nove cifre.

A destra la statua di **Lord Murugan** (in lingua Tamil: முருகன் சிலை); Bahasa Malaysia: Tugu Dewa Murugga, rappresenta **Kartikeya**, è la statua più alta di una divinità indù in Malesia.

Un quadrato magico particolare

Il quadrato magico di ordine (n = 8) e di costante magica «$M_{(8)}$ = 260», scoperto dal e scienziato ed inventore e diplomatico **Benjamin Franklin** (1706 – 1790) e pubblicato in un libro del «1767».

Non solo, come detto, la costante magica è pari a «260», ma la somma di ogni e mezza riga e mezza colonna e mezza diagonale è pari a «130».

Quadrato magico [8 x 8] 260

52	61	4	13	20	29	36	45	260
14	3	62	51	46	35	30	19	260
53	60	5	12	21	28	37	44	260
11	6	59	54	43	38	27	22	260
55	58	7	10	23	26	39	42	260
9	8	57	56	41	40	25	24	260
50	63	2	15	18	31	34	47	260
16	1	64	49	48	33	32	17	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260

Il panquadrato di Adriano Graziotti

Il ***Panquadrato*** è un'opera straordinaria del e matematico e pittore e scultore italiano **Ugo Adriano Graziotti** (1912 - 2000); considerato il più grande quadrato magico è entrato, a buon diritto, nei Guinnes dei primati.

È un quadrato magico di ordine (n = 64) che comprende tutti i numeri naturali da «1» a «4 096» e la cui costante magica è: «$M_{(64)}$ = 131 104».

Oltre a risultare dalla somma e dei numeri e delle righe e delle colonne e delle diagonali, la costante magica «131 104», è data anche dalla somma dei numeri che compongono le raffigurazioni simmetricamente distribuite nel quadrato: i «4» labirinti, i «4» semidiagonali, i «4» greche, i «4» vampiri, i «2» bracci della croce centrale.

Si ottengono cosi «18» *sottoquadrati* aventi la stessa costante del quadrato principale.

Nell'ultima casella in basso a destra, il numero «87» è la criptica firma dell'artista; infatti le iniziali «H» e «G» di **Hadrianus Graziotti** corrispondono rispettivamente all'ottava e settima lettera dell'alfabeto; il numero accanto, «2 736», è l'anno di esecuzione del quadrato secondo il calendario dell'antica Roma dato e dalla somma di «1983», anno di composizione del lavoro, e «753 a.C.», anno della fondazione dell'Urbe.

Un quadrato non propriamente magico

Premessa

Disegnamo su un foglio lo schema vuoto di una griglia quadrata, di dimensioni a scelta; ad esempio di ordine «n = 7»; una matrice di (7 x 7).

Consideriamo una serie di numeri naturali composta da «k» numeri «k = 2 • n»: nel nostro esempio dall'«1» al «14».

A ciascuna riga e a ciascuna colonna di tale matrice, attribuiamo uno dei numeri interi della serie il maniera arbitraria, stando attenti ad utilizzare tutti numeri diversi tra loro.

Ipotizziamo di attribuire alle ascisse i valori: 8, 5, 1, 14, 2, 3, 6, indicandoli sopra le caselle superiori di ogni colonna.

Ipotizziamo di attribuire alle ordinate i valori: 13, 10, 7, 11, 9, 12, 4, indicandoli a desta delle caselle più a sinistra di ogni riga.

Calcoliamo la somma «k» di tutti gli «n» numeri della serie «1 ÷ 14»:

$$k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = \frac{14 \bullet (14 + 1)}{2} = 105$$

Riportiamo, infine, in ciascuna casella della griglia un numero uguale alla somma dei due valori attribuiti alla relativa riga e alla relativa colonna.

A questo punto siete pronti per esibirvi.

Modalità di esecuzione

b) Fai scegliere, a qualcuno, una casella qualsiasi della griglia; evidenziala in qualche modo, e poi *elimina* (segna come eliminate) tutte le altre caselle e nella stessa riga e nella stessa colonna.

Ad esempio, se la casella scelta dovesse essere la «a_{26}», che contiene il valore «13», la dovresti evidenziare e poi dovresti *eliminare* le caselle: a_{16}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{27}, a_{36}, a_{46}, a_{56}, a_{66}, a_{67}, che contengono rispettivamente i numeri «16», «18», «15», «11», «24», «12», «16», «10», «14», «12», «15», «7».

Osservazioni

In una matrice, «a_{26}» significa che il valore considerato si trova nella casella localizzata e nella «2^a riga» e nella «6^a colonna».

c) Chiedi, ora, di scegliere una seconda casella tra quelle rimaste ed esegui lo stesso procedimento di *eliminazione* delle caselle.

d) Ripeti la richiesta altre tre volte «**e**), **f**)», fino a quando rimarrà una sola casella scoperta (non *eliminata*).

g) Evidenzia anche quest'ultima casella.

Esegui, infine, la somma «w» dei sette numeri contenuti nelle caselle evidenziatele; nel nostro esempio: w = «14», «13», «9», «16», «15», «26», «12» = 105.

X

	8	5	1	14	2	3	6
13	8+13 21	5+13 18	1+13 14	14+13 27	2+13 15	3+13 16	6+13 19
10	8+10 18	5+10 15	1+10 11	14+10 24	2+10 12	3+10 13	6+10 16
7	8+7 15	5+7 12	1+7 8	14+7 21	2+7 9	3+7 10	6+7 13
11	8+11 19	5+11 16	1+11 12	14+11 25	2+11 13	3+11 14	6+11 17
9	8+9 17	5+9 14	1+9 10	14+9 23	2+9 11	3+9 12	6+9 15
12	8+12 20	5+12 17	1+12 13	14+12 26	2+12 14	3+12 15	6+12 18
4	8+4 12	5+4 9	1+4 5	14+4 18	2+4 6	3+4 7	6+4 10

a

21	18	14	27	15	16	19
18	15	11	24	12	13	16
15	12	8	21	9	10	13
19	16	12	25	13	14	17
17	14	10	23	11	12	15
20	17	13	26	14	15	18
12	9	5	18	6	7	10

b

21	18	14	27	15	16	19
18	15	11	24	12	13	16
15	12	8	21	9	10	13
19	16	12	25	13	14	17
17	14	10	23	11	12	15
20	17	13	26	14	15	18
12	9	5	18	6	7	10

c

21	18	14	27	15	16	19
18	15	11	24	12	13	16
15	12	8	21	9	10	13
19	16	12	25	13	14	17
17	14	10	23	11	12	15
20	17	13	26	14	15	18
12	9	5	18	6	7	10

d

21	18	14	27	15	16	19
18	15	11	24	12	13	16
15	12	8	21	9	10	13
19	16	12	25	13	14	17
17	14	10	23	11	12	15
20	17	13	26	14	15	18
12	9	5	18	6	7	10

e

21	18	14	27	15	16	19
18	15	11	24	12	13	16
15	12	8	21	9	10	13
19	16	12	25	13	14	17
17	14	10	23	11	12	15
20	17	13	26	14	15	18
12	9	5	18	6	7	10

f

21	18	14	27	15	16	19
18	15	11	24	12	13	16
15	12	8	21	9	10	13
19	16	12	25	13	14	17
17	14	10	23	11	12	15
20	17	13	26	14	15	18
12	9	5	18	6	7	10

g

21	18	14	27	15	16	19
18	15	11	24	12	13	16
15	12	8	21	9	10	13
19	16	12	25	13	14	17
17	14	10	23	11	12	15
20	17	13	26	14	15	18
12	9	5	18	6	7	10

Considerazioni

Non si può parlare di *quadrato magico* perché non esiste alcuna costante magica «$M_{(n)}$» ed, inoltre, alcuni numeri sono presenti in più di una casella:

Il 21: a_{11} (1ª riga, 1ª colonna) e a_{34} (3ª riga, 4ª colonna).

Il 18: a_{12} (1ª riga, 2ª colonna) e a_{21} (2ª riga, 1ª colonna) e a_{67} (6ª riga, 7ª colonna) e a_{74} (7ª riga, 4ª colonna).

Il 14: a_{13} (1ª riga, 3ª colonna) e a_{46} (4ª riga, 6ª colonna) e a_{52} (5ª riga, 2ª colonna) e a_{65} (6ª riga, 5ª colonna).

Il 15: a_{15} (1ª riga, 5ª colonna) e a_{22} (2ª riga, 2ª colonna) e a_{31} (3ª riga, 1ª colonna) e a_{57} (5ª riga, 7ª colonna) e a_{66} (6ª riga, 6ª colonna).

e cosi via.

Da notare che il valore «k» è uguale al valore «w»; ricordiamo che «k» è la somma di tutti gli «n» numeri della serie «1 ÷ 14» scelta da te, mentre «w» è la somma dei sette numeri contenuti nelle caselle evidenziate, scelte da qualcuno.

Nel caso tu, da semplice osservatore, dovessi vedere la griglia «a» già compilata, potresti ugualmente conoscere quale sarà la somma «w», dei sette numeri contenuti nelle caselle che verranno evidenziate, semplicemente sommando i numeri contenuti nelle caselle che si trovano in una qualsiasi delle due diagonali.

$S_1 = 21 + 15 + 8 + 25 + 11 + 15 + 10 = 105.$

$S_2 = 19 + 13 + 9 + 25 + 10 + 17 + 12 = 105.$

Un'idea

La particolarità di una matrice costruita nel nodo precedentemente spiegato, potrebbe essere sfruttata per presentare un gioco di *pseudo-prestigio*.

Tu conosci la somma «k» di tutti gli «n» numeri della serie «1 ÷ 14» scelta da te è pertanto conosci anche la somma «w» dei sette numeri contenuti nelle caselle che andrai ad evidenziare.

Puoi, pertanto, mostrare ad un gruppo di persone una matrice di ordine «n > 3» già compilata, ovviamente senza svelare il procedimento con cui suno stati posizionati i numeri nelle varie caselle (meglio usare una matrice di ordine «n = 7»).

Scrivi un nomero su un foglietto (ovviamente scrivi la somma «w»), inserisci il foglietto un una busta, chidi quest'ultima e consegnala ad una persona qualsiasi da te nominata sul momento: NOTAIO.

Procedi come spiegato in precedenza fino a che hai evidenziato tutte le sette caselle; a questo punto esegui la somma «w» dei numeri presenti al loro interno (ovviamente troverai, come risultato il valore «w» uguale al valore «k»).

Apri la busta, estrai il foglietto e mostra a tutti che, avvalendoti delle tue facoltà paramormali, il valore che avevi scritto sul foglietto coincide proprio con quello «w», somma dei numeri presenti nelle caselle evidenziate (nel nostro esempio: k = w = **105**).

Con una scusa (o pasticciando assai la matrice in modo da renderla non più utilizzabile) fai in modo che nessuno possa ripetere un'ulteriore prova sulla stessa griglia poiché si accorgerebbe subito che, qualsiasi siano le caselle scelte per essere evidenziate, la somma dei numeri presenti al loro interno fornisce sempre il medesimo valore.

Approfondimenti

Prime precisazioni

Quadrati magici normali di ordine doppiamente pari

Il terzo metodo, pagina 21

Se, per esempio, avessimo una griglia (3 x 3), potremmo individuare la posizione di ogni sua casella assimilando la griglia ad una matrice quadrata del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Nella quale «a» rappesenta l'elemento (nel nostro caso il numero inserito nella casella), mentre il pedice indica la posizione della casella all'interno della matrice quadrata (nel nostro caso la griglia).

Il primo numero del pedice (indicato genericamente con «*m*») indica la riga cui appartiene l'elemento, il secondo numero (indicato genericamente con «*n*») indica la colonna cui appartiene l'elemento.

Seconde precisazioni

Esagoni magici

Esagono magico di ordine «n = 3», pagina 37

Si può dimostrare che esistono ***esagoni magici puri*** solo e per «n = 1» (banale) e per «n = 3»; inoltre, la soluzione di ordine «n = 3» è essenzialmente unica, a meno delle solite e rotazioni e riflessioni.

La costante magica «$M_{(n)}$» di un *esagono magico puro* si può determinare partendo dalla costatazione che i numeri nell'esagono sono consecutivi, quindi la loro somma è un *numero triangolare*; per la precisione:

$$s = \frac{1}{2} \bullet (9 \bullet n^4 - 18 \bullet n^3 + 18 \bullet n^2 - 9 \bullet n)$$

Visto che le righe possono essere in tre direzioni, ogni numero è contato tre volte, quindi la somma di tutte le righe è «3 • s»; ma ci sono «r = 3 • (2 • n – 1)» righe in un esagono, quindi la somma in ogni riga deve essere:

$$M = \frac{3 \bullet s}{r} = \frac{(9 \bullet n^4 - 18 \bullet n^3 + 18 \bullet n^2 - 9 \bullet n)}{2 \bullet (2 \bullet n - 1)}$$

Riscrivendo l'espressione come:

$$32M = 72 \bullet n^3 - 108 \bullet n^2 + 90 \bullet n - 27 + \frac{5}{2 \bullet n - 1}$$

Ci si può rendere conto, infine, che la quantità «$^5/_{(2 \bullet n - 1)}$» deve essere necessariamente un intero; gli unici «n ≥ 1» che soddisfano questa condizione sono e «n = 1» e «n = 3», pertanto, non esiste nessun esagono magico per nessun ordine superiore a «n = 3».

Operazioni sui quadrati magici

Moltiplicazione

Un quadrato magico e rimane ugualmente magico quando i suoi numeri sono moltiplicati per qualsiasi numero fisso «k» e avrà come costante magica:

kM(n)

Nell'esempio seguente gli elementi del quadrato di sinistra ($M_{(4)}$ = 34) sono stati triplicati (moltiplicati per «3») nel quadrato di destra:

$3M_{(4)}$ = 102

10	3	13	8
5	16	2	11
4	9	7	14
15	6	12	1

30	9	39	24
15	48	6	33
12	27	21	42
45	18	36	3

$$M_{(4)} = \frac{4 \bullet (4^2+1)}{2} = 34 \qquad 3M_{(4)} = 3 \bullet \frac{4 \bullet (4^2+1)}{2} = 102$$

Addizione algebrica

Un quadrato magico e rimane ugualmente magico quando se addizioniamo algebricamente (od aggiungiamo o sottraiamo) la stessa quantità «q» a ciascun ed avrà come costante magica:

o $M_{(n)}$ + nq o $M_{(n)}$ - nq.

Nell'esempio seguente a ogni elemento del quadrato magico normale di sinistra è stato aggiunto «q = 5» e, pertanto, la costante magica del quadrato di sinistra risulta:

M(4) = 34 + 4 • 5 = 54.

10	3	13	8
5	16	2	11
4	9	7	14
15	6	12	1

15	8	18	13
10	21	7	16
9	14	12	19
20	11	17	6

$$M_{(4)} = \frac{4 \bullet (4^2+1)}{2} = 34 \qquad 3M_{(4)} = \frac{4 \bullet (4^2+1)}{2} + 4 \bullet 5 = 54$$

Elementi sotratti da un numero

Un quadrato magico rimane magico anche quando i suoi numeri vengono od aggiunti o sottratti da un qualsiasi numero fisso «z». In particolare,

Se sotraiamo ogni numero della griglia (4 x 4) dal numero «z = 21», oterremo come costante magica:

21 • 4 - $M_{(4)}$ = 84 – 34 = 50

10	3	13	8
5	16	2	11
4	9	7	14
15	6	12	1

11	18	8	13
16	5	19	10
17	12	14	7
6	15	9	20

$$M_{(4)} = \frac{4 \bullet (4^2+1)}{2} = 34 \qquad 3M_{(4)} = 21 \bullet 4 - \frac{4 \bullet (4^2+1)}{2} = 50$$

Elementi sotratti da (n^2 + 1)

Se ogni elemento in un quadrato magico viene sottratto da «$n^2 + 1$», otteniamo il complemento del quadrato originale; nell'esempio seguente, gli elementi della griglia (4 × 4) a sinistra ($M_{(4)} = 34$) vengono sottratti da «$17 = (4^2 + 1)$» per ottenere il complemento del quadrato a destra che, pertanto ha la stessa costante magica:

$M_{(4)} = 34$

10	3	13	8
5	16	2	11
4	9	7	14
15	6	12	1

$$M_{(4)} = \frac{4 \bullet (4^2 + 1)}{2} = 34$$

7	14	4	9
12	1	15	6
13	8	10	3
2	11	5	16

$$3M_{(4)} = \frac{4 \bullet (4^2 + 1)}{2} = 34$$

Appendice «a»

Quadrati magici planetari

Premessa

I quadrati magici planetari, nel simbolismo esoterico, sono definiti in funzione dei numeri rappresentativi di ogni pianeta; in particolare sono distinti in base agli schemi dei primi sette ordini, da «n = 3» a «n = 9».

Questi schemi vengono sia riprodotti o su sigilli o su clavicole sia raffigurati su pergamene; la corrispondenza, fra i pianeti ed i rispettivi ordini dei quadrati magici normali, è la seguente:

Saturno ♄ — Ordine (n = 3)

	a		15
8	1	6	15
3	5	7	15
4	9	2	15
15	15	15	15

Il *quadrato magico normale* di ***Saturno*** è quello di ordine «n = 3» perché «3» è il primo dei numeri attribuiti a questo pianeta (i numeri di *Saturno* sono: 3, 9, 15, 45), mentre la costante magica «$M_{(3)}$ = 15» è il terzo numero di questo pianeta, schema (**a**).

Perché funga da talismano, questo schema deve essere o inciso su lamina di piombo o tracciato su pergamena vergine con inchiostro di colore nero; garantisce la protezione dai pericoli più gravi, donando e forza e sicurezza a chi lo indossa.

Giove ♃ — Ordine (n = 4)

	b			34
1	15	14	4	34
12	6	7	9	34
8	10	11	5	34
13	3	2	16	34
34	34	34	34	34

Il quadrato magico normale di ***Giove*** è quello di ordine «n = 4», mentre la costante magica è «$M_{(4)}$ = 34», schema (**b**).

Perché funga da talismano, questo schema deve essere o inciso su lamina di stagno o tracciato su pergamena vergine con inchiostro di colore blu-celeste; garantisce la protezione dai pericoli mortali, favorisce la vittoria nei processi e propizia e ricchezza ed onori a chi lo indossa.

Marte ♂

Ordine (n = 5)

c 65

11	24	7	20	3	65
4	12	25	8	16	65
17	5	13	21	9	65
10	18	1	14	22	65
23	6	19	2	15	65
65	65	65	65	65	65

Il quadrato magico normale di ***Marte*** è quello di ordine «n = 5», mentre la costante magica è «$M_{(5)}$ = 65», schema (**c**).

Perché funga da talismano, questo schema deve essere o inciso su lamina di ferro o tracciato su pergamena vergine con inchiostro di colore rosso; aiuta a guarire dalle malattie e dona forza e protegge dai nemici chi lo indossa.

Sole A

Ordine (n = 6)

d 111

6	32	3	34	35	1	111
7	11	27	28	8	30	111
19	14	16	15	23	24	111
18	20	22	21	17	13	111
25	29	10	9	26	12	111
36	5	33	4	2	31	111
111	111	111	111	111	111	

Il quadrato magico normale del ***Sole*** è quello di ordine «n = 6», mentre la costante magica è «$M_{(6)}$ = 111», schema (**d**).

Perché funga da talismano, questo schema deve essere o inciso su lamina d'oro o tracciato su pergamena vergine con inchiostro di colore o giallo od arancione; dona e fortuna e successo a chi lo indossa.

Venere ♀

Ordine (n = 7)

e

175

22	47	16	41	10	35	4	175
5	23	48	17	42	11	29	175
30	6	24	49	18	36	12	175
13	31	7	25	43	19	37	175
38	14	32	1	26	44	20	175
21	39	8	33	2	27	45	175
46	15	40	9	34	3	28	175
175	175	175	175	175	175	175	

Il quadrato magico normale di ***Venere*** è quello di ordine «n = 7», mentre la costante magica è «$M_{(7)}$ = 175», schema (**e**).

Perché funga da talismano, questo schema deve essere o inciso su lamina di rame o tracciato su pergamena vergine con inchiostro di colore verde; favorisce le relazioni amorose e porta fortuna nei giochi d'azzardo a chi lo indossa.

Mercurio ☿

Ordine (n = 8)

f

260

1	63	63	4	5	59	58	8	260
56	10	11	53	52	14	15	49	260
48	18	19	45	44	22	23	41	260
25	39	38	28	29	35	34	32	260
33	31	30	36	37	27	26	40	260
24	42	43	21	20	46	47	17	260
16	50	51	13	12	54	55	9	260
57	7	6	60	61	3	2	64	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260

Il quadrato magico normale di ***Venere*** è quello di ordine «n = 8», mentre la costante magica è «$M_{(8)}$ = 260», schema (**f**).

Perché funga da talismano, questo schema deve essere o inciso su lamina d'argento o tracciato su pergamena vergine con inchiostro di colore porpora; protegge tutte le attività commerciali e rafforza le capacità psichiche di chi lo indossa.

Luna ☽

Ordine (n = 9)

g

									369
37	78	29	70	21	62	13	54	5	369
6	38	79	30	71	22	63	14	46	369
47	7	39	80	31	72	23	55	15	369
16	48	8	40	81	32	64	24	56	369
57	17	49	9	41	73	33	65	25	369
26	58	18	50	1	42	74	34	66	369
67	27	59	10	51	2	43	76	35	369
36	68	19	60	11	52	3	44	76	369
77	28	69	20	61	12	53	4	45	369
369	369	369	369	369	369	369	369	369	369

Il quadrato magico normale della ***Luna*** è quello di ordine «n = 9», mentre la costante magica è «$M_{(9)}$ = 369», schema (**g**).

Perché funga da talismano, questo schema deve essere o inciso su lamina d'argento o tracciato su pergamena vergine con inchiostro di colore grigio; stimola e le capacità artistiche e la creatività di chi lo indossa.

Appendice «b»

Un quadrato magico singolare

Premessa

Presentiamo, appresso, la griglia «**X**» che rappresenta il più piccolo quadrato magico di primi *dispari* consecutivi possibile; indichiamo, inoltre, i numeri primi utilizzati.

1 – 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29 – 31 – 37 – 41 – 43 – 47 – 53 – 59 – 61 – 67 – 71 – 73 – 79 – 83 – 89 – 97 – 101 – 103 – 107 – 109 – 113 – 127 – 131 – 137 – 139 – 149 – 151 – 157 – 163 – 167 – 173 – 179 – 181 – 191 – 193 – 197 – 199 – 211 – 223 – 227 – 229 – 233 – 239 – 241 – 251 – 257 – 263 – 271 – 277 – 281 – 283 – 293 – 307 – 311 – 313 – 317 – 331 – 337 – 347 – 349 – 353 – 359 – 367 – 373 – 379 – 383 – 389 – 397 – 401 – 409 – 419 – 421 – 431 – 433 – 439 – 443 – 449 – 457 – 461 – 463 – 467 – 479 – 487 – 491 – 499 – 503 – 509 – 521 – 523 – 541 – 547 – 557 – 563 – 569 – 571 – 577 – 587 – 593 – 599 – 601 – 607 – 613 – 617 – 619 – 631 – 641 – 643 – 647 – 653 – 659 – 661 – 673 – 677 – 683 – 691 – 701 – 709 – 719 – 727 – 733 – 739 – 743 – 751 – 757 – 761 – 769 – 773 – 787 – 797 – 809 – 811 – 821 – 823 – 827.

X

4 514

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37	**4 514**
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739	**4 514**
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281	**4 514**
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157	**4 514**
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599	**4 514**
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449	**4 514**
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433	**4 514**
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283	**4 514**
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151	**4 514**
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41	**4 514**
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41	**4 514**
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	449	751	**4 514**
4 514	**4 514**	**4 514**	**4 514**	**4 514**	**4 514**	**4 514**	**4 514**	**4 514**	**4 514**	**4 514**	**4 514**	

4 514

Osservazioni

I numeri primi sono e sempre e solo *dispari*.

In verità, il numero «1» non è un *numero primo*, anche se è divisibile solo e per se stesso e per l'unità (come si è soliti definire i numeri primi).

Potremmo, per eliminare qualsiasi ambiguità, utilizzare un'altra definizione: i numeri primi hanno solo due divisori differenti fra loro (il numero uno ha un solo divisore, il numero «1»).

Se considerassimo il numero «1» come un numero primo, molte e delle definizioni e dei teoremi di matematica dovrebbero essere enunciati in modo e più complesso e con molte eccezioni.

Esempi

Considerare l'uno (1) come un numero primo porterebbe nel ***Crivello di Eratostene*** a cancellare tutti i *numeri successivi in quanto multipli di uno* con la conseguenza che tutti i numeri naturali verrebbero considerati composti, eccetto il numero «1».

Oppure, ci sarebbero problemi con il ***Teorema fondamentale dell'aritmetica*** che afferma che: *ogni numero naturale diverso da zero e da* «1»*, o è un numero primo o è il prodotto di fatti primi.*
Pertanto, se considerassimo «1» come un numero primo, *tutti i successivi numeri naturali sarebbero numeri composti*, perché «1» sarebbe un fattore primo presente in tutti.

Precisazioni

Eratostene di Cirene, in greco antico: Ἐρατοσθένης, (276 a.C. circa – 194 a.C. circa) fu un **e** matematico e astronomo e geografo e poeta e filologo e filosofo greco.
Il ***crivello di Eratostene*** (detto anche *setaccio per i numeri primi*) è un algoritmo iterativo che permette di determinare tutti i numeri primi minori o uguali a un numero prescelto «n», escludendo, pertanto, tutti i numeri composti.

Appendice «c»

Quadrati magici o non normali od imperfetti

Trattazione

Sono i quadrati magici costruiti con numeri non da «1» a «n^2», ma con «n^2» numeri qualsiasi (sempre in ***progressione aritmetica***).

Vediamo come ricavare la costante magica «$M_{(n)}$» per questo tipo di quadrato.

Partiamo con un quadrato di ordine (n = 3).

Indichiamo e con «a» il primo elemento della progressione aritmetica e con «b» il secondo elemento; la ragione della progressione «d» è, pertanto, «d = b - a».

I nove numeri della progressione sono: ed «a» e «b» e «b + d = b + (b – a) = 2 • b - a», «2 • b - a + (b – a) = 3 • b – 2 • a; seguendo lo stesso ragionamento si ha inoltre: 4b - 3a, 5b - 4a, 6b - 5a, 7b - 6a, 8b - 7a. Il quadrato che si ottiene è, infine:

Griglia «a»

7b-6a	a	5b – 4a
2b-a	4b – 3a	6b – 5a
3b – 2a	8b – 7a	b

La costante magica «$M_{(3)}$» sarà data dalla somma o di una riga o di una colonna o di una diagonale (oppure, non dimentichiamolo, dal termine centrale per l'ordine «n», cioè da (4b - 3a) x 3 = 12b - 9a), per cui:

$$\mathbf{M_{(3)} = 12b - 9a}$$

Ricaviamo il valore della costante magica «$M_{(n)}$» seguendo un diverso procedimento:

Sia (n = 3) l'ordine del quadrato magico di ragione diversa da 1.

Siano ed «a» e «b» rispettivamente ed il primo ed il secondo termine degli (n^2 = 9) numeri della progressione da inserire nelle caselle della griglia.

La costante magica «$M_{(3)}$» del quadrato magico normale di ragione «1»; costituito dai numeri da «1» a «9», è:

$$M_{(3)} = \frac{3 \bullet (3^2 + 1)}{2} = \frac{3 \bullet 10}{2} = 15$$

Da «15» sottraiamo una volta «3»; 15 – 3 = 12.

Da «15» sottraiamo due volte «3»; 15 – 6 = 9

La costante magica del quadrato di ragione diversa da uno e con ed «a» e «b» rispettivamente ed il primo ed il secondo elemento della progressione è:

$$\mathbf{M_{(n)} = 12b - 9a}$$

Osserviamo che il coefficiente di «b» è «12» che corrisponde a «15 - 3», cioè alla costante magica «15» del quadrato con ragione «d = 1» meno l'ordine «3» dello stesso quadrato; mentre il coefficiente di «a» è «9» che corrisponde a «15 – 2 • 3», cioè alla costante magica «15» meno due volte l'ordine «3».

Possiamo generalizzare questo risultato nel modo seguente.

Per costruire un quadrato magico utilizzando i numeri di una qualsiasi progressione aritmetica e, quindi, per calcolarne la costante magica «M(n)», procediamo nel modo seguente.

1) Consideriamo una progressione aritmetica di ordine «n» e di ragione **d** qualsiasi. Indichiamo con ed «a» e «b» rispettivamente ed il primo ed il secondo termine della progressione;

2) Si calcola la costante magica «M(n)» del corrispondente quadrato magico dello stesso ordine, ma di ragione «d = 1» con la formula che già conosciamo; la riportiamo ugualmente, per chiarezza:

$$M_{(n)} = \frac{n \bullet (n^2 + 1)}{2} \qquad [1]$$

Da questo valore della costante magica, andiamo a sottrarre:

- prima una sola volta il valore dell'ordine «n».

$$M_{(n)} - n = \frac{n \bullet (n^2+1)}{2} - n = \frac{n \bullet (n^2-1)}{2} \qquad [a]$$

- in seguito, due volte il valore dell'ordine «n».

$$M_{(n)} - 2 \bullet n = \frac{n \bullet (n^2+1)}{2} - 2 \bullet n = \frac{n \bullet (n^2-3)}{2} \qquad [b]$$

Il valore [a] è il fattore di «b» nella formula: 12b – 9a.
Il valore [b] è il fattore di «a» nella formula: 12b – 9a.

La costante magica, de quadrato di partenza, diviene pertanto:

$$M_{(n)} = \frac{n \bullet (n^2-1)}{2} \bullet b - \frac{n \bullet (n^2-3)}{2} \bullet a \qquad [2]$$

Ottenendo una formula più generale della [1] comprendendo in se anche quest'ultima.
Nella [1], è ed «a = 1» e «b = 2» e la ragione «d = 1»; sostituendo nella [2] si ha:

$$M_{(n)} = \frac{n \bullet (n^2-1)}{2} \bullet 2 - \frac{n \bullet (n^2-3)}{2} \bullet 1 = \frac{(n^2-n) \bullet 2 - n^3 + 3 \bullet n}{2} = \frac{2 \bullet n^3 - 2 \bullet n - n^3 + 3n}{2} = \frac{n^3+n}{2} = \frac{n \bullet (n^2+1)}{2}$$

1° esempio

Consideriamo un quadrato magico e di ordine (n = 3) e con il primo termine della progressione «a = 4».e il secondo termine della progressione «b = 7» e di ragione «d ≠ 1» il cui valore sia pari a «d = b – a = 7 – 4 = 3»; la costante magica è:

12 • 7 – 9 • 4 = 84 – 36 = 48

Se applichiamo direttamente la [2]:

$$M_{(3)} = \frac{3 \bullet (3^2-1)}{2} \bullet 7 - \frac{3 \bullet (3^2-3)}{2} \bullet 4 = \frac{3 \bullet 8}{2} \bullet 7 - \frac{3 \bullet 6}{2} \bullet 4 = 12 \bullet 7 - 9 \bullet 4 = 48$$

I nove numeri della progressione aritmetica sono: ed «a» e «b» e «b + d = b + (b – a) = 2 • b - a», «2 • b - a + (b – a) = 3 • b – 2 • a; seguendo lo stesso ragionamento si ha inoltre: 4b - 3a, 5b - 4a, 6b - 5a, 7b - 6a, 8b – 7a, il loro valore è, pertanto: «4», «7», «10», «13», «16», «19», «22», «25», «28».

7b-6a	a	5b – 4a
2b-a	4b – 3a	6b – 5a
3b – 2a	8b – 7a	b

Griglia «a»

Griglia «b»

25	4	19
10	16	22
13	28	7

Otteniamo, infine, il quadrato magico:

			X	34
25	4	19		34
10	16	22		34
13	28	7		34
34	34	34		34

2° esempio

Consideriamo un quadrato magico e di ordine (n = 5) e con il primo termine della progressione «a = 3».e il secondo termine della progressione «b = 5» e di ragione «d ≠ 1» il cui valore sia pari a «d = b – a = 5 – 3 = 2».

La costante magica «$M_{(3)}$» sarà data dalla somma o di una riga o di una colonna o di una diagonale (oppure, non dimentichiamolo, dal termine centrale per l'ordine «n»(vedi griglia «B», cioè da (12b - 11a) • 5 = 60b - 55a), per cui:

$M_{(3)}$ = 60b - 55a

60 • 5 – 55 • 3 = 300 – 165 = 135

Se applichiamo direttamente la [2]:

$$M_{(3)} = \frac{5 \bullet (5^2 - 1)}{2} \bullet 5 - \frac{5 \bullet (5^2 - 3)}{2} \bullet 3 = \frac{5 \bullet 24}{2} \bullet 5 - \frac{5 \bullet 22}{2} \bullet 3 = 60 \bullet 5 - 55 \bullet 3 = 135$$

I venticinque numeri della progressione aritmetica sono: ed «a» e «b» e «b + d = b + (b – a) = 2 • b - a», «2 • b - a + (b – a) = 3 • b – 2 • a; seguendo lo stesso ragionamento si ha inoltre: 4b - 3a, 5b - 4a, 6b - 5a, 7b - 6a, 8b – 7a, 9b – 8a, 10b – 9a, 11b – 10a, 12b – 11a, 13b – 12°, 14b – 13, 15b – 14°, 16b – 15°, 17b – 16, 18b – 17a, 19b – 18a, 21b – 20a, 23b – 22a, 24b – 23a; il loro valore è, pertanto: «3», «5», «7», «9», «11», «13», «15», «17», «19», «21», «23», «25», «27», «29», «31», «33», «35», «37», «39», «41», «43», «45», «47», «49», «51».

Griglia «A»

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Griglia «B»

16b – 15a	23b – 22a	a	7b – 6a	14b – 13a
22b – 21a	4b – 3a	6b – 5a	13b – 12a	15b – 14a
3b – 2a	5b – 4a	**12b – 11a**	19b – 18a	21b – 20a
9b – 8a	11b – 10a	18b – 17a	20b – 19a	2b - a
10b – 9a	17b – 16a	24b – 23a	b	8b – 7a

Sostituendo, nella griglia «B», i rispettivi valorim, si ottiene:

Y **135**

35	**49**	**3**	**17**	**31**	**135**
47	**11**	**15**	**29**	**33**	**65**
9	**13**	**27**	**41**	**45**	**65**
21	**25**	**39**	**43**	**7**	**65**
23	**37**	**51**	**5**	**19**	**65**
135	**65**	**65**	**65**	**65**	**135**

Tavola della costanti magiche di quadrati e di ragione «d = 1» e di ragione «d ≠ 1»

Ordine «n» del quadrato magico	Costante magica con ragione d = 1	Costante magica con ragione d ≠ 1
3	15	12 • b – 9 • a
4	34	30 • b – 26 • a
5	65	60 • b – 55 • a
6	111	105 • b – 99 • a
7	175	168 • b – 161 • a

Appendice «d»

Metodo LUX di costrizione

Premessa

Il ***metodo LUX di Conway*** per quadrati magici è un algoritmo che permette di costruire quadrati magici aventi ordini «4 • m + 2», con «m» intero positivo (m ≥ 1); deve il nome al matematico inglese **John Horton Conway** (1937 – 2020).

Il metodo

Si inizia creando una matrice [(2 • n + 1) x (2 • n + 1)] che consiste in:

«m + 1» righe di «**L**»
«1» riga di «**U**»
«m - 1» righe di «**X**»

infine si scambia la «**U**» che si trova nel mezzo con la «**L**» sopra di essa.

Ogni lettera rappresenta un blocco (2 x 2) di numeri, ordinati secondo il disegno del carattere.

$$\mathrm{L}: \begin{array}{ccc} 4 & & 1 \\ & \swarrow & \\ 2 & \rightarrow & 3 \end{array} \qquad \mathrm{U}: \begin{array}{ccc} 1 & & 4 \\ \downarrow & & \uparrow \\ 2 & \rightarrow & 3 \end{array} \qquad \mathrm{X}: \begin{array}{ccc} 1 & & 4 \\ & \nearrow\!\!\!\searrow & \\ 3 & & 2 \end{array} \qquad \text{Schema}$$

Osservazioni
La *forma* delle lettere ed «L» ed «U» ed «X» suggeriscono in modo e naturale e spontanea l'ordine di inserimento, da cui il nome dell'algoritmo LUX.

Dopo la stesura della matrice di caratteri, si prosegue sostituendo ogni lettera con quattro numeri consecutivi, partendo con: 1, 2, 3, 4, nel quadrato centrale della riga in alto, e muovendosi di blocco in blocco nella maniera descritta dal ***metodo Siamese*** (vedi **Il secondo metodo: Siamese**, a pagina 5) le celle vengono riempite muovendosi in diagonale e verso l'alto e verso destra (↗).

Quando con un movimento si uscisse dal quadrato, si deve procedere, invece, ripartendo dalla prima colonna/riga (in base a dove ci si trova).

Se, spostandosi, si finisse in una cella già occupata, si deve andare ad occupare la cella immediatamente sotto alla cella precedentemente riempita (↓).

L'ordine dei numeri all'interno del blocco (2 x 2) segue lo **schema [1]** dettato dalla forma delle lettere:

Esempio

Utilizzando «m = 2» si crea un quadrato di lettere (5 x 5) per cui la matrice finale di numeri sarà di (10 x 10).

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

La sostituzione parte dalla «L» al centro della prima riga, si prosegue sostituendo la quarta «X» dell'ultima riga, poi la «U» alla fine della quarta riga, di seguito la «L» che si trova all'inizio della terza riga, etc.

Si otterrà, pertanto, un quadrato magico e di ordine (n = 10) e di costante magica pari a:

$$M_{(10)} = \frac{10 \bullet (10^2 + 1)}{2} = 505$$

sviluppo della costruzione

				4	1				
				2	3				
		20	17						
		18	19						
16	13	24	21						
14	15	22	23						
								9	12
								10	11
						5	8		
						7	6		

				4	1	32	29		
				2	3	30	31		
		20	17	28	25				
		18	19	26	27				
16	13	24	21						
14	15	22	23						
37	40	45	48					9	12
38	39	46	47					10	11
41	44					5	8	33	36
43	42					7	6	35	34

68	65			4	1	32	29	60	57
66	67			2	3	30	31	58	59
		20	17	28	25	56	53	64	61
		18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52				
14	15	22	23	50	51				
37	40	45	48					9	12
38	39	46	47					10	11
41	44	69	72			5	8	33	36
43	42	71	70			7	6	35	34

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

Il quadrato magico nella sua forma finale

X 505

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57	505
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59	505
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61	505
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63	505
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85	505
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87	505
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12	505
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11	505
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36	505
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34	505
505	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505

Appendice «e»

Quadrati magici particolari

Trattazione

Metodo di costruzione di quadrati magici utilizzando numeri che non seguono alcun tipo di progressione.

Il seguente esempio ci dimostra come sia possibile costruire un quadrato magico partendo addirittura da un numero che costituisce la costante magica presa a piacere.

Fissiamo il valore della costante magica, per esempio «$M_{(3)}$ = 54»; nella prima colonna inseriamo tre numeri tali che la loro somma sia «54»; per esempio e «17» e «24» e «13».

Nella seconda casella della prima riga mettiamo una «x» e calcoliamo il valore da inserire nelle caselle vuote in funzione della «x».

1

17	x	a
24	b	c
13	d	e

2

17	x	37 - x
24	4 + x	26 - x
13	50 – 2x	2x - 9

Dalla griglia «1»

possiamo scrivere:

a + 17 + x = 54   a = 54 – 17 – x   a = 37 – x

ora conosciamo il valore di «a» in funzione di «x».

Possiamo, pertanto, continuare a scrivere:

b + 13 + 37 – x = 54   b = 54 – 13 – 37 + x   b = 4 + x

ora conosciamo il valore di «b» in funzione di «x».

Possiamo, pertanto, continuare a scrivere:

c + 24 + 4 + x = 54   c = 54 – 24 – 4 – x   c = 26 – x

ora conosciamo il valore di «c» in funzione di «x».

Possiamo, pertanto, continuare a scrivere:

d + x + 4 + x = 54   d = 54 – x – 4 – x   d = 50 – 2x

ora conosciamo il valore di «d» in funzione di «x».

Possiamo, pertanto, continuare a scrivere:

e + 13 + 50 – 2x = 54   e = 54 – 13 – 50 + 2x   e = 2x – 9

ora conosciamo il valore di «e» in funzione di «x».

Questi risultati, li riportiamo nella griglia «**2**»

W

			54
17	14	23	54
24	18	12	54
13	22	19	54
54	54	54	54

Prendendo, adesso, in considerazione la diagonale discendente da destra verso sinistra, possiamo scrivere l'equazione:

17 + 4 + x + 2x – 9 = 54

Dalla quale ricaviamo il valore di «x».

x + 2x = 54 – 17 – 4 + 9   3x = 42   x = 14

Sostituendo, nella griglia «**2**», ad «x» il suo valore, otteniamo il quadrato magico ripor-tato in «**W**».

Un risultato insolito

Scegliendo a piacere ed il valore della costante magica «$M_{(3)}$» e la terna di numeri la cui somma è uguale a «$M_{(3)}$», potrebbe capitare che il valore della «x» non risulti un numero intero, ma sia rappresentato da una frazione.

Ammettiamo di scegliere e come costante magica «$M_{(3)}$ = 92» e come terna di numeri da posizionare nella prima colonna e «34» e «49» e «9».

Seguendo il procedimento che ormai conosciamo, otteniamo la griglia «**4**».

3

34	x	a
49	b	c
9	d	e

4

34	x	58 - x
49	25 + x	18 - x
9	18 + 2x	2x - 16

Prendendo, adesso, in considerazione la diagonale discendente da destra verso sinistra, possiamo scrivere l'equazione:

$$34 + (25 + x) + (2x - 16) = 92$$

Dalla quale ricaviamo il valore di «x».

$$3x = 92 - 34 - 25 + 16 \qquad 3x = 49 \qquad x = {}^{49}/_{3}$$

W

			92
34	$\frac{49}{3}$	$\frac{125}{3}$	92
49	$\frac{124}{3}$	$\frac{5}{3}$	92
9	$\frac{103}{3}$	$\frac{146}{3}$	92
92	92	92	92

Sostituendo, nella griglia «**4**», ad «x» il suo valore, indicato in ogni casella, otteniamo il quadrato magico riportato in «**W**».

Volendo eliminare le frazioni, si devono moltiplicare, in questo caso, e tutti i numeri e la costante magica «$M_{(3)}$» per «3», per quest'ultima si otterrebbe: $M_{(3)} = 92 \bullet 3 = 276$.

Dopo aver eseguito le dovute zio-ni, si ottiene, pertanto, il quadrato magico ri-portato in «**Wa**».

Wa

			276
34	49	125	276
49	124	5	276
9	103	146	276
276	276	276	276

Naturalmente, sempre per eliminare le fra-zioni, si sarebbero potuti moltiplicare, sempre in questo caso, e tutti i numeri e la costante magica «$M_{(3)}$» per un qualsiasi multiplo di «3».

In termini più generali, nel caso comparissero valori na-ri, si dovrebbero moltiplicare e tutti i numeri e la costante magi-ca «$M_{(3)}$» o per il denominatore delle frazioni o per un suo multiplo.

Appendice «f»

Moltiplicazione fra quadrati magici?

Trattazione

Esiste un bizzarro procedimento per fondere assieme due quadrati magici, che potremmo definire, anche se impropriamente, moltiplicazione.

Consideriamo due quadrati magici scelti a caso, ad esempio quelli che seguono; ed un quadrato magico di ordine (n = 3) ed un quadrato magico di ordine (n = 4) che, *moltiplicati*, daranno un quadrato magico di ordine (n = 12).

Il primo quadrato magico è rappresentato con la griglia A, mentre il secondo quadrato magico è rappresentato con la griglia B.

A

8	1	6
3	5	7
4	9	2

B

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Iniziamo col disegnare una griglia di (4 x 4) e consideriamo la posizione dell'«1» nella griglia «B»; l'«1» si trova nella posizione in alto a sinistra e precisamente, considerando la griglia «B» come una matrice, nella posizione [1, 1].

In quella casella, andiamo ad inserire la griglia« A» composta dai primi nove numeri (dall'«1» al «9»).

8 1 6 3 5 7 4 9 2			

Consideriamo, ora, i successivi nove numeri (dal «10» al «18») e disponiamoli in una griglia (3 x 3), nella stessa sequenza dei numeri che compongono la griglia «**A**»; un altro procedimento, per ottenere il medesimo risultato, consiste nell'aggiungere «9» ad ognuno dei numeri presenti nella griglia «**A**».

Otteniamo, pertanto una disposizione dei numeri come nella griglia «**X**».

X

17	10	15
12	14	16
13	18	11

Consideriamo la posizione del 2 nella griglia B; il 2 si trova, considerando la griglia «B» come una matrice, nella posizione [4, 3] ed è, per l'appunto, in questa casella, della griglia (12 x 12), che va inserita la griglia «**X**».

Successivamente, possiamo iterare tale procedimento che ci permette di realizzare le sedici (16) griglie (3 x 3) da inserire in successione nella griglia (12 x 12) a seconda della posizione di numeri: 1, 2, 3, . . ., 14, 15, 16, nella griglia B.

.Sotto riportiamo la griglia finale completa.

8	1	6	134	127	132	125	118	123	35	28	33
3	5	7	129	131	133	120	122	124	30	32	34
4	9	2	130	135	128	121	126	119	31	36	29
107	100	105	53	46	51	62	55	60	80	73	78
102	104	106	48	50	52	57	59	61	75	77	79
103	108	101	49	54	47	58	63	56	76	81	74
71	64	69	89	82	87	98	91	96	44	37	42
66	68	70	84	86	88	93	95	97	39	41	43
67	72	65	85	90	83	94	99	92	40	45	38
116	109	114	26	19	24	17	10	15	143	136	141
111	113	115	21	23	25	12	14	16	138	140	142
112	117	110	22	27	20	13	18	11	139	144	137

Da cui risulta il quadrato magico normale «a» e di ordine (n = 12) e di costante magica «$M_{(12)}$ = 870».

a

												870
8	1	6	134	127	132	125	118	123	35	28	33	870
3	5	7	129	131	133	120	122	124	30	32	34	870
4	9	2	130	135	128	121	126	119	31	36	29	870
107	100	105	53	46	51	62	55	60	80	73	78	870
102	104	106	48	50	52	57	59	61	75	77	79	870
103	108	101	49	54	47	58	63	56	76	81	74	870
71	64	69	89	82	87	98	91	96	44	37	42	870
66	68	70	84	86	88	93	95	97	39	41	43	870
67	72	65	85	90	83	94	99	92	40	45	38	870
116	109	114	26	19	24	17	10	15	143	136	141	870
111	113	115	21	23	25	12	14	16	138	140	142	870
112	117	110	22	27	20	13	18	11	139	144	137	870
870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	870

Appendice «g»

Miscellanea

Alcuni esempi

Presentiamo una serie di quadrati magici normali di ordine via via crescente da (n = 3) fino a (n = 17), indicandone e la costate magica «$M_{(n)}$» e l'intervallo dei numeri costituenti (1 ÷ m), con «$m = n^2$» e la sommatoria da «1» a «m».

Ordine (n = 3)

	1		15
4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15
15	15	15	15

$M_{(3)} = \frac{3 \bullet (3^2+1)}{2} = 15$ (1 ÷ 9) $\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9 \bullet (9+1)}{2} = 45$

Ordine (n = 4)

	2			34
4	14	15	1	34
9	7	6	12	34
5	11	10	8	34
16	2	3	13	34
34	34	34	34	34

$M_{(4)} = \frac{4 \bullet (4^2+1)}{2} = 34$ (1 ÷ 16) $\sum_{k=1}^{16} k = \frac{16 \bullet (16+1)}{2} = 136$

Ordine (n = 5)

		3			65
11	24	7	20	3	65
4	12	25	8	16	65
17	5	13	21	9	65
10	18	1	14	22	65
23	6	19	2	15	65
65	65	65	65	65	65

$M_{(5)} = \frac{5 \bullet (5^2+1)}{2} = 65$ (1 ÷ 25) $\sum_{k=1}^{25} k = \frac{25 \bullet (25+1)}{2} = 325$

Ordine (n = 6)

			4			111
6	32	3	34	35	1	111
7	11	27	28	8	30	111
19	14	16	15	23	24	111
18	20	22	21	17	13	111
25	29	10	9	26	12	111
36	5	33	4	2	31	111
111	111	111	111	111	111	111

$M_{(6)} = \frac{6 \bullet (6^2 + 1)}{2} = 111$ (1 ÷ 36) $\sum_{k=1}^{36} k = \frac{36 \bullet (36 + 1)}{2} = 666$

Ordine (n = 7)

			5				175
22	47	16	41	10	35	4	175
5	23	48	17	42	11	29	175
30	6	24	49	18	36	12	175
13	31	7	25	43	19	37	175
38	14	32	1	26	44	20	175
21	39	8	33	2	27	45	175
46	15	40	9	34	3	28	175
175	175	175	175	175	175	175	175

$M_{(7)} = \frac{7 \bullet (7^2 + 1)}{2} = 175$ (1 ÷ 49) $\sum_{k=1}^{49} k = \frac{49 \bullet (49 + 1)}{2} = 1\,225$

Ordine (n = 8)

6 260

16	41	36	5	27	62	55	18	260
26	63	54	19	13	44	33	8	260
1	40	45	12	22	51	58	31	260
23	50	59	30	4	37	48	9	260
38	3	10	47	49	24	29	60	260
52	21	32	57	39	2	11	46	260
43	14	7	34	64	25	20	53	260
61	28	17	56	42	15	6	35	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260

$M_{(8)} = \frac{8 \bullet (8^2+1)}{2} = 260$ (1 ÷ 64) $\sum_{k=1}^{64} k = \frac{64 \bullet (64+1)}{2} = 2\,080$

Ordine (n = 9)

7 369

31	76	13	36	81	18	29	74	11	369
22	40	58	27	45	63	20	38	56	369
67	4	49	77	9	54	65	2	47	369
30	75	12	32	77	14	34	79	16	369
21	39	57	23	41	59	25	43	61	369
66	3	48	68	5	50	70	7	52	369
35	80	17	28	73	10	33	78	15	369
26	44	62	19	37	55	24	42	60	369
71	8	53	64	1	46	69	6	51	369
369	369	369	369	369	369	369	369	369	369

$M_{(9)} = \frac{9 \bullet (9^2+1)}{2} = 369$ (1 ÷ 81) $\sum_{k=1}^{81} k = \frac{81 \bullet (81+1)}{2} = 3\,321$

Ordine (n = 10)

8 505

13	3	22	14	4	47	37	29	48	38	505
24	16	11	25	17	34	26	40	35	27	505
21	8	5	20	9	42	31	46	43	30	505
12	2	23	15	1	50	36	28	49	39	505
6	19	10	7	18	33	44	41	32	45	505
95	82	91	94	83	68	57	60	89	56	505
89	99	78	86	98	51	65	73	52	62	505
80	93	96	81	92	59	70	55	58	71	505
77	85	90	76	84	67	75	61	66	74	505
88	100	79	87	97	54	64	72	53	63	505
505	505	505	505	505	505	505	505	505	870	505

$M_{(10)} = \frac{10 \bullet (10^2+1)}{2} = 505$ (1 ÷ 100) $\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \bullet (100+1)}{2} = 5\,050$

Ordine (n = 11)

9 671

68	81	94	107	120	1	14	27	40	53	66	671
80	93	106	119	11	13	26	39	52	65	67	671
92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	79	671
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	671
116	8	21	23	36	49	62	75	88	90	103	671
7	20	33	35	48	61	74	87	89	102	115	671
19	32	34	47	60	73	86	99	101	114	6	671
31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	18	671
43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	30	671
55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	671
56	69	82	95	108	121	2	15	28	41	54	671
671	671	671	671	671	671	671	671	671	671	671	671

$M_{(11)} = \frac{11 \bullet (11^2+1)}{2} = 671$ (1 ÷ 121) $\sum_{k=1}^{121} k = \frac{121 \bullet (121+1)}{2} = 7\,381$

Ordine (n = 12)

10 870

1	2	3	141	140	139	138	137	136	10	11	12	870
13	14	151	129	128	127	126	125	124	22	23	24	870
25	26	27	117	116	115	114	113	112	34	35	36	870
108	107	106	40	41	42	43	44	45	99	98	97	870
96	95	94	52	53	54	55	56	57	87	86	85	870
84	83	82	64	65	66	67	68	69	75	74	73	870
72	71	70	76	77	78	79	80	81	63	62	61	870
60	59	58	88	89	90	91	92	93	51	50	49	870
48	47	46	100	101	102	103	104	105	39	38	37	870
109	110	111	33	32	31	30	29	28	118	119	120	870
121	122	123	21	20	19	18	17	16	130	131	132	870
133	134	135	9	8	7	6	5	4	142	143	144	870
870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	870	870

$M_{(12)} = \frac{12 \bullet (12^2 + 1)}{2} = 870$ (1 ÷ 144) $\sum_{k=1}^{144} k = \frac{144 \bullet (144 + 1)}{2} = 10\,440$

Ordine (n = 13)

11 — 1 105

93	108	123	138	153	168	1	16	31	46	61	76	91	1 105
107	122	137	152	167	13	15	30	45	60	75	90	92	1 105
121	136	151	166	12	14	29	44	59	74	89	104	106	1 105
135	150	165	11	26	28	43	58	73	88	103	105	120	1 105
149	164	10	25	27	42	57	72	87	102	117	119	134	1 105
163	9	24	39	41	56	71	86	101	116	118	133	148	1 105
8	23	38	40	55	70	85	100	115	130	132	147	162	1 105
22	37	52	54	69	84	99	114	129	131	146	161	7	1 105
36	51	53	68	83	98	113	128	143	145	160	6	21	1 105
50	65	67	82	97	112	127	142	144	159	5	20	35	1 105
64	66	81	96	111	126	141	156	158	4	19	34	49	1 105
78	80	95	110	125	140	155	157	3	18	33	48	63	1 105
79	94	109	124	139	154	169	2	17	32	47	62	77	1 105
1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105	1 105

$M_{(13)} = \frac{13 \bullet (13^2 + 1)}{2} = 1\,105$ $(1 \div 169)$ $\sum_{k=1}^{169} k = \frac{169 \bullet (169+1)}{2} = 14\,365$

Ordine (n = 14)

12 1 379

177	186	195	1	10	19	28	128	137	146	99	108	68	77	1 379
185	194	154	9	18	27	29	136	145	105	107	116	76	78	1 379
193	153	155	17	26	35	37	144	104	106	115	124	84	86	1 379
152	161	163	25	34	36	45	103	112	114	123	132	85	94	1 379
160	162	171	33	42	44	4	111	113	122	131	140	93	53	1 379
168	170	179	41	43	3	12	119	121	130	139	141	52	61	1 379
169	178	187	49	2	11	20	120	129	138	147	100	60	69	1 379
30	39	48	148	157	166	175	79	88	97	50	59	117	126	1 379
38	47	7	156	165	174	176	87	96	56	58	67	125	127	1 379
46	6	8	164	173	182	184	95	55	57	66	75	133	135	1 379
5	14	16	172	181	183	192	54	63	65	74	83	134	143	1 379
13	15	24	180	189	191	151	62	64	73	82	91	142	102	1 379
21	23	32	188	190	150	159	70	72	81	90	92	101	110	1 379
22	31	40	196	149	158	167	71	80	89	98	51	109	118	1 379
1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379	1 379

$M_{(15)} = \frac{14 \bullet (14^2 + 1)}{2} = 1\,379$ (1 ÷ 196) $\sum_{k=1}^{196} k = \frac{196 \bullet (196 + 1)}{2} = 19\,306$

Ordine (n = 15)

							13								1 695
122	139	156	173	190	207	224	1	18	35	52	69	86	103	120	1 695
138	155	172	189	206	223	15	17	34	51	68	85	102	119	121	1 695
154	171	188	205	222	14	16	33	50	67	84	101	118	135	137	1 695
170	187	204	221	13	30	32	49	66	83	100	117	134	136	153	1 695
186	203	220	12	29	31	48	65	82	99	116	133	150	152	169	1 695
202	219	11	28	45	47	64	81	98	115	132	149	151	168	185	1 695
218	10	27	44	46	63	80	97	114	131	148	165	167	184	201	1 695
9	26	43	60	62	79	96	113	130	147	164	166	183	200	217	1 695
25	42	59	61	78	95	112	129	146	163	180	182	199	216	8	1 695
41	58	75	77	94	111	128	145	162	179	181	198	215	7	24	1 695
57	74	76	93	110	127	144	161	178	195	197	214	6	23	40	1 695
73	90	92	109	126	143	160	177	194	196	213	5	22	39	56	1 695
89	91	108	125	142	159	176	193	210	212	4	21	38	55	72	1 695
105	107	124	141	158	175	192	209	211	3	20	37	54	71	88	1 695
106	123	140	157	174	191	208	225	2	19	36	53	70	87	104	1 695
1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695	1 695

$M_{(15)} = \frac{15 \bullet (15^2 + 1)}{2} = 1\,695$ $(1 \div 225)$ $\sum_{k=1}^{225} k = \frac{225 \bullet (225 + 1)}{2} = 25\,425$

Ordine (n = 16)

14 2 056

256	9	247	246	12	13	243	242	16	17	239	238	20	21	235	2	2 056
3	226	213	45	46	210	209	49	50	206	205	53	54	201	32	254	2 056
4	33	200	63	193	192	66	67	189	188	70	71	185	58	224	253	2 056
252	34	59	178	169	89	90	166	165	93	94	161	80	198	223	5	2 056
251	222	60	81	160	101	155	154	104	105	151	98	176	197	35	6	2 056
7	221	196	82	99	146	141	117	118	137	112	158	175	61	36	250	2 056
8	37	62	174	100	113	136	123	122	133	144	157	83	195	220	249	2 056
23	38	73	173	107	114	129	126	127	132	143	150	84	184	219	234	2 056
24	218	183	85	108	115	125	130	131	128	142	149	172	74	39	233	2 056
232	217	75	86	148	138	124	135	134	121	119	109	171	182	40	25	2 056
231	41	76	87	147	145	116	140	139	120	111	110	170	181	216	26	2 056
27	42	180	162	159	156	102	103	153	152	106	97	95	77	215	230	2 056
28	43	179	177	88	168	167	91	92	164	163	96	79	78	214	229	2 056
228	202	199	194	64	65	191	190	68	69	187	186	72	57	55	29	2 056
227	225	44	212	211	47	48	208	207	51	52	204	203	56	31	30	2 056
255	248	10	11	245	244	14	15	241	240	18	19	237	236	22	1	2 056
2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056	2 056

$M_{(16)} = \frac{16 \bullet (16^2 + 1)}{2} = 2\,056$ (1 ÷ 256) $\sum_{k=1}^{256} k = \frac{256 \bullet (256+1)}{2} = 32\,896$

Quadrato magico di **Benjamin Franklin**

Ordine (n = 17)

								15									2 465
155	174	193	212	231	250	269	288	1	20	39	58	77	96	115	134	153	2 465
173	192	211	230	249	268	287	17	19	38	57	76	95	114	133	152	154	2 465
191	210	229	248	267	286	16	18	37	56	75	94	113	132	151	170	172	2 465
209	228	247	266	285	15	34	36	55	74	93	112	131	150	169	171	190	2 465
227	246	265	284	14	33	35	54	73	92	111	130	149	168	187	189	208	2 465
245	264	283	13	32	51	53	72	91	110	129	148	167	186	188	207	226	2 465
263	282	12	31	50	52	71	90	109	128	147	166	185	204	206	225	244	2 465
281	11	30	49	68	70	89	108	127	146	165	184	203	205	224	243	262	2 465
10	29	48	67	69	88	107	126	145	164	183	202	221	223	242	261	280	2 465
28	47	66	85	87	106	125	144	163	182	201	220	222	241	260	279	9	2 465
46	65	84	86	105	124	143	162	181	200	219	238	240	259	278	8	27	2 465
64	83	102	104	123	142	161	180	199	218	237	239	258	277	7	26	45	2 465
82	101	103	122	141	160	179	198	217	236	255	257	276	6	25	44	63	2 465
100	119	121	140	159	178	197	216	235	254	256	275	5	24	43	62	81	2 465
118	120	139	158	177	196	215	234	253	272	274	4	23	42	61	80	99	2 465
136	138	157	176	195	214	233	252	271	273	3	22	41	60	79	98	117	2 465
137	156	175	194	213	232	251	270	289	2	21	40	59	78	97	116	135	2 465
2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465	2 465

$M_{(17)} = \frac{17 \bullet (17^2 + 1)}{2} = 2\,465$ $(1 \div 289)$ $\sum_{k=1}^{289} k = \frac{289 \bullet (289 + 1)}{2} = 41\,905$

Appendice «h»

Il gioco del 15, ma non solo un gioco

Trattazione

Il ***gioco del quindici*** è un *rompicapo* classico e creato nel «1874» da **Noyes Palmer Chapman** (1811 – 1889), postino in servizio a Canastota, e reso popolare nel «1891» dallo e scacchista e creatore di enigmi matematici statunitense **Samuel Loyd** (1841 – 1911), noto anche come **Sam Loyd**.

Il gioco consiste di una griglia di forma quadrata divisa in e quattro righe e quattro colonne (quindi 16 *caselle*), su cui sono posizionate «15» tessere quadrate, numerate progressivamente a partire dall'«1»; le tessere possono scorrere od in orizzontale od in verticale, ma il loro spostamento è ovviamente limitato dall'esistenza di un singolo spazio vuoto.

Lo scopo del gioco è riordinare le tessere, dopo averle *mescolate* con un metodo casuale, in modo da riposizionarle e con il numero «1» in alto a sinistra e con gli altri numeri a seguire e da sinistra a destra e dall'alto in basso, fino al «15» seguito dalla casella vuota.

Questo gioco ebbe, ed alla fine degli anni **'70** ed ai primi degli anni **'80**, una grandissima diffusione, nonostante si trattasse di un rompicapo già esistente da parecchio tempo.

Curiosità

Loyd mise in palio l'*esorbitante* (per quei tempi) cifra di mille dollari come premio per chi fosse riuscito a risolvere una versione del gioco partendo da una posizione simile a quella finale, con i numeri «14» e «15» scambiati; un premio che nessuno e mai ha potuto riscuotere e mai avrebbe potuto reclamare poiché, come l'autore del gioco sapeva benissimo, la soluzione, partendo da una tale configurazione, è matematicamente impossibile.

Il gioco del quindici (spesso generalizzato in versione n-esima) è un classico problema con cui vengono spiegati gli algoritmi basati su euristiche.

Chiarimenti

L'***Algoritmo euristico*** (o ***euristica***), ed in matematica ed in informatica, è un particolare tipo di algoritmo progettato per risolvere un problema più velocemente, o nel caso in cui i metodi classici siano troppo lenti nel calcolo o per trovare una soluzione approssimata, nel caso in cui i metodi classici falliscano nel trovare una soluzione esatta.

Il gioco del quindici può essere impiegato anche per comporre un quadrato magico, considerando lo spazio vuoto come se fosse lo zero; lo schema «**A**» rappresenta la soluzione.

Soluzione unica, non considerando né le rotazioni o di 90° o di 180° o di 270° né le riflessioni rispetto sia all'asse od orizzontale o verticale sia a ciascuna delle sue diagonali.

Da notare il valore della costante magica «$M_{(4)}$» che in questo caso risulta di «$M_{(4)} = 30$», mentre nel quadrato magico normale di ordine (n = 4), la costante magica è pari a:

$$M_{(4)} = \frac{4 \bullet (4^2 + 1)}{2} = 34$$

A

				30
15	1	2	12	30
4	10	9	7	30
8	6	5	11	30
3	13	14	0	30
30	30	30	30	30

Il quadrato magico nel Faust di Goethe

Premessa

Un e brillante ed affascinante esempio di simbolismo fra e matematica e letteratura è la *filastrocca* dell'***Antro della Strega*** che possiamo leggere nel ***Faust***, il celeberrimo poema dello e scrittore e poeta, e drammaturgo e saggista e pittore e teologo e filosofo ed umanista e scienziato e critico d'arte e critico musicale tedesco **Johann Wolfgang von Goethe** (1749 – 1832).

La filastrocca

Questa ***filastrocca*** si presta ad una interpretazione matematica e può essere letta come un *algoritmo* per costruire un quadrato magico a partire dai numeri naturali da «1» a «9».

La filastrocca in tedesco recita:

"*Du mußt verstehn!*
Aus Eins mach' Zehn, Und Zwei laß gehn,
Und Drei mach' gleich, So bist Du reich.
Verlier' die Vier!
Aus Fünf und Sechs, So sagt die Hex', Mach' Sieben und Acht,
So ist's vollbracht. Und Neun ist Eins, Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmal-Eins!"

La filastrocca in italiano diviene:

"Capire tu mi devi!
Di Un fai Dieci, getta via il Due,
uguaglia il Tre, e sarai ricco.
Che crepi il Quattro!
Di Cinque e Sei, dice la strega, fai Sette e Otto.
È tutto fatto. Se Nove è Uno, Dieci è nessuno.
Questa è la tabellina della strega!"

Johann Wolfgang von Goethe

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Cusiosità

Il ***Faust*** è un dramma in versi di **Johann Wolfgang von Goethe**; ubblicato nel «1808», è una delle opere più famose di Goethe, ritenuta inoltre una delle più importanti della letteratura ed europea e mondiale.

Indice analitico