Scuola di speleologia di Cagliari
della
CNSS-SSI

Speleo Club di Cagliari

«Antiche» metodiche matematiche

Moltiplicazioni, divisioni, elevazioni a potenza, estrazione di radice, funzioni trigonometriche, prima della calcolatrice: e molte curiosità.

Paolo Salimbeni

SOCIETA' SPELEOLOGICA ITALIANA

Comitato Esecutivo Regionale Sardegna

Commissione Nazionale Scuole di Speleologia

Edizione 7E5[10]

Testi divulgativi

Prima edizione: 06 / 2011
Ultima edizione: 10/ 2021

Prefazione

«*Antiche*» recita il titolo e non si è troppo lontani dal vero, anche se, solo *ieri*, le avrei potute definire «*Moderne*».

L'era dei ***calcolatori***, ma soprattutto sia quella del ***digitale***, ormai dilagante, sia quella dell'onnipresente «**Internet**», hanno reso apparentemente superfluo acquisire molte di quelle nozioni che un tempo s'imparavano a scuola; alcune fin dalle elementari.

In questa dispensa, ho cercato di rivivere i tempi nei quali non esistevano, non solo i calcolatori, ma neanche le calcolatrici tascabili; i tempi, non molto lontani, in cui molte operazioni, che adesso si eseguono premendo un determinato tasto (spesso senza sapere esattamente il perché), si dovevano risolvere ***a mano***.

Ho altresì inserito modi non comuni di calcolare e qualche curiosità dei tempi *molto* passati, arrivando, a ritroso, fino ai romani; i romani di Roma, quella **Imperiale**.

Termino con qualche curiosità, un poco più complessa, dal punto di vista matematico, rispetto al resto della dispensa, ma senza esagerare.

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare all'amico **Giuseppe Frau** che, lette le bozze, quasi definitive, del lavoro, lo ha *benevolmente criticato* sia indicandomi e sviste e lacune sia fornendomi ed osservazioni e consigli.

L'Autore

L'Autore sarà grato a tutti coloro che gli segnaleranno eventuali od *errori* od *imprecisioni* (sono graditi anche e *consigli* ed *opinioni*).

Paololuigi Salimbeni via P. Cavaro, 73 09131 Cagliari
cellulare: +39 3493897629
e-mail: p.salimba@gmail.com

Questa ed altre dispense, sempre dello stesso Autore, nel sito di **Paolo Salimbeni** «http://www.paolosalimbeni.it»; vedi in: **Dispense**.

Dello stesso Autore, e nel medesimo sito, alcune presentazioni in ***PowerPoint***; vedi in: **Presentazioni**.

Copyright © Paolo Salimbeni

Tutti i diritti sono riservati, a norma di legge ed a norma delle convenzioni internazionali; nessuna parte dell'opera può essere riprodotta, tradotta o diffusa, in qualsiasi forma o sistema (per fotocopia, microfilm, supporti magnetici, o qualsiasi altro procedimento), o rielaborata o trasmessa, con l'uso di sistemi elettronici, senza l'autorizzazione scritta dell'autore. . . . **o no ?!**

All rights reserved, no part of this book may be reproduced, who may quote brief passages or reproduce illustrations in un review with appropriate credit; nor ay any part of this book be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means electronic, photocopying, recording, or other without permission in writing from the Author. . . . **or not ?!**

«Antiche» metodiche matematiche

Moltiplicazioni, divisioni, elevazioni a potenza, estrazione di radice, funzioni trigonometriche, prima della calcolatrice, e molte curiosità.

Introduzione

Prima che si potesse disporre comunemente delle calcolatrici che eseguivano le quattro operazioni, e le *moltiplicazioni* e le *divisioni*, di numeri a molte cifre, erano operazioni e lunghe e laboriose, e per questo motivo, non di rado, anche eccellenti matematici commettevano delle banali sviste.

Le elevazioni a potenza, e in particolar modo le radici ennesime, erano, parimenti, oltremodo e lunghe e complesse da calcolare.

Per ovviare a tale inconveniente, si è pensato di trasformare e le moltiplicazioni e le divisioni in modo da poter eseguire soltanto e addizioni e sottrazioni; si è pensato inoltre di trasformare l'elevazione a potenza in modo da poter ottenere il risultato con una più semplice moltiplicazione (anche se gravosa) e l'estrazione di radice in modo da poter ottenere il risultato con una più semplice divisione (anche se ugualmente molto gravosa).

A tal uopo si utilizzarono i logaritmi, inventati (o scoperti?) dallo scienziato inglese **John Napier** detto ***Nepero*** (1550 – 1617).

Furono pertanto compilate delle apposite tavole che fornivano, per ogni numero, il corrispondente *logaritmo* o, più esattamente, la corrispondente *mantissa*.

Non si può, e non si vuole, qui analizzare compiutamente né la teoria né il procedimento pratico, su cui si basano le tavole logaritmiche, poiché, tale approfondimento, esula ampiamente dai nostri scopi, ma ci limitiamo a dare semplici ed incomplete nozioni.

Definizione: *il logaritmo di un numero* «N» *in base* «a» *è uguale all'esponente* «X» *da dare alla base* «a» *per ottenere il numero considerato* «N».

Il ***logaritmo decimale*** in forma mista (quello che si ricava dalle tavole), è composto di una parte intera, le cifre che stanno prima del punto (la virgola) che si chiama ***caratteristica*** e può essere sia *positiva* sia *negativa*, e da una parte decimale, le cifre che stanno dopo il punto, che si chiama ***mantissa*** e che può essere soltanto positiva.

La *caratteristica* del logaritmo decimale di un numero «N» *maggiore* di uno, è data da tante unità *positive* quante sono le cifre intere di «N» meno una; la *caratteristica* del logaritmo decimale di un numero «N» *minore* di uno, è data da tante unità *negative* quanti sono gli zeri che precedono la prima cifra significativa, contando anche lo zero che precede la virgola.

Le Tavole numeriche logaritmiche

Come detto, il prodotto «a» fra due numeri «b» e «c» (a = b • c) si ottiene anche sommando i loro logaritmi «log b» e «log c»: log a = log b + Log c, e ricavando poi l'antilogaritmo e pertanto il valore di «a».

Il quoziente «a» fra due numeri «b» e «c» (a = b / c) si ottiene trovando la differenza fra i loro logaritmi: log a = log b - log c, e ricavando poi l'antilogaritmo e pertanto il valore di «a».

L'elevazione a potenza si ottiene moltiplicando il logaritmo del numero «b» per l'esponente «c» ($a = b^c$): log a = log b • c, e ricavando poi l'antilogaritmo e pertanto il valore di «a».

L'estrazione di radice si ottiene dividendo il logaritmo del numero «b» per il valore della radice ($a = b^{1/c}$): log a = log b / c, e ricavando poi l'antilogaritmo e pertanto il valore di «a».

N : 0 - 350

N	Mant.	N	Mant.
250	39 794	**300**	47 712
251	39 967	**301**	47 857
252	40 140	**302**	48 001
253	312	**303**	144
254	483	**304**	287

Fig. 01

In [fig. 01] è riportato uno stralcio dalle ***Tavole logaritmiche*** nel quale si può notare come ad ogni *numero* corrisponde una determinata *mantissa*; la *caratteristica* dipende dal numero di *cifre significative* del numero.

Moltiplicazione

a = b • c = antilog (log b + log c)

se: b = 25, c = 15

si ha: log b = log 25 = 1,397 94, log c = log 15 = 1,176 09

da cui: log a = 1,397 94 + 1,176 09 = log a = 2,574 03, e quindi a = 375,000

Osservazioni

Forse non l'avete ancora notato, ma se andate a vedere sullo stralcio delle ***Tavolette logaritmiche*** [fig. 01], potrete accorgervi che il numero «250» ha la stessa *mantissa* del numero «25» che stiamo utilizzando.

Ebbene sì, la *mantissa* di un numero non cambia o dividendolo o moltiplicandolo per multipli di dieci ($10^{\pm n}$); i numeri «0,025», «0,25», «2,5», . . ., «2 500», «25 000», «250 000», hanno, pertanto, sempre la medesima mantissa.

Divisione

a = b / c = antilog (log b - Log c)
se: b = 3234, c = 23
si ha: log b = log 323 4 = 3,509 74, log c = log 23 = 1,361 727 836
da cui: log a = 3,509 74 – 1,361 73 = 2,148 01, e quindi a = 140,609

Elevazione a potenza

a = b^c = antilog (c • log b)
se: b = 8, c = 3
si ha: log b = log 8 = 0,903 09
da cui: log a = 0,903 09 • 3 = 2,709 27, e quindi a = 512,000

Estrazione di radice

a = $b^{1/c}$ = antilog (log b / c)
se: b = 48, c = 4
si ha: log b = log 48 = 1,681 24
da cui: log a = 1,681 24 / 4 = 0,420 31, e quindi a = 2,632

Tante nozioni, per contro, si sono dovute tacere: non vi ho mai detto, ad esempio, né cosa né come si ricava un *antilogaritmo*; se v'interessa l'argomento, procuratevi un buon libro sulla materia, oppure . . . cercate su **Internet**, ma attenti a ciò che trovate!

Le Tavole trigonometriche logaritmiche

Parimenti alle ***tavole numeriche logaritmiche*** sono state redatte delle ***tavole logaritmiche delle funzioni trigonometriche***: ***seno***, ***coseno***, ***tangente***, ***cotangente*** [fig 02].

41°

	LOGARITMI						
′	sen	d	cos	d	tang	d	cotg
30	$\bar{1}$,82 126	15	$\bar{1}$,87 446	12	$\bar{1}$,94 681	25	0,05 319
31	141	14	434	11	706	26	294
32	155	14	423	11	732	25	268
33	169	15	412	11	757	26	243
34	184		401		783		217

[fig. 02]

Volendo moltiplicare la lunghezza «s» per il seno dell'angolo «α»: x = s • sen α, la procedura da seguire è simile alla moltiplicazione fra due numeri, utilizzando i logaritmi.

x = antilog (log s + log sen α)
se: s = 138 m, α = 41° 32' 47"
si ha quindi:
log s = log 138 = 2,139 88
log sen β = log sen 41° 32' 00" = $\bar{1}$,821 55
log sen γ = log sen 41° 33' 00" = $\bar{1}$,82 169
$\bar{1}$.821 69 - $\bar{1}$,821 55 = 0,000 14
1' = 60" = 0,000 14, 60" : 0,000 14 = 47 : x; x = 0,000 14 • 47 / 60 = 0,000 11
Y = 0,821 55 + 0,000 11 = 0,821 66
Log sen 41° 32' 47" = $\bar{1}$,821 66

da cui: 2,139 88 + $\bar{1}$,82166 = 1,961 54 (il segno sopra l'uno, indica che la *caratteristica* è negativa).

e quindi, ricavando l'antilogaritmo: x = 91,525 m.

In [fig. 02] è riportato uno stralcio dalle ***Tavole trigonometriche logaritmiche*** nel quale si può notare come ad ogni *numero*, e ad ogni *funzione trigonometrica*, corrisponde e una determinata *caratteristica* e una determinata *mantissa*.

Le tavole aritmetiche

Le ***tavole aritmetiche*** sono state create per permettere di ricavare e facilmente e velocemente: sia l'elevazione e al quadrato e al cubo sia l'estrazione della radice e quadrata e cubica, di un numero «n» [fig. 03].

Da notare che «$\pi \bullet n$» è la lunghezza della circonferenza, mentre «$\pi \bullet n^2 / 4$» e

51 - 100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n} . 1000$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
51	26 01	132 651	7,14 143	3,70 843	19,6078	160,2	2 042,8
52	27 04	140 608	21 110	73 251	2308	163,4	2 123,7
53	28 09	148 877	28 011	75 629	18,8679	166,5	2 206,2
54	29 16	157 464	34 847	77 976	5185	169,6	2 290,2
55	30 25	166 375	41 620	80 295	.1818	172,8	2 375,8

[fig. 03]

l'area del cerchio, quando «n» è la lunghezza del diametro.

Il termine (1 000 / n) altro non è se non il reciproco di «n», moltiplicato per mille per evidenziare il maggior numero possibile di cifre significative del risultato.

Per esempio, il reciproco di «n = 637» è «n^{-1} = 0,001 57» e, pertanto, sulle tavole potrebbero essere espresse soltanto ***tre*** cifre significative; moltiplicando il reciproco di «n» per mille (1 000) si ha (n^{-1} • 1 000 = 1,569 86) si possono evidenziare ***sei*** cifre significative.

Le tavole dei valori naturali

Con l'evento delle calcolatrici tascabili che erano in grado di eseguire le quattro operazioni, lo scenario è radicalmente cambiato, almeno sia nell'ambito professionale sia per gli aspetti esclusivamente ludici; a scuola era ancora vietato usarle.

Ora era possibile usare, per le funzioni trigonometriche, i più semplici valori naturali [fig. 04].

Volendo moltiplicare la lunghezza «s» per il seno dell'angolo «α»: x = s • sen α, la procedura da seguire è molto più semplice, che quella concernente l'uso dei logaritmi.

VALORI NATURALI					41°
sen	cos	tang	cotg	'	
0,66 262	0,74 896	0,88 473	1,13 029	30	
284	876	524	1,12 963	29	
306	857	576	897	28	
327	838	628	831	27	
349	818	680	765	26	

[fig. 04]

se: s = 247 m, a = 41° 32' 39"

si ha quindi:

sen a = sen 41° 32' 00" = 0,663 06

sen b = sen 41° 33' 00" = 0,663 27

Osservazione

Per ragioni che esulano dallo scopo di questa dispensa, il valore «28'» deve essere interpretato come «32'» ed il valore «29'» deve essere interpretato come «33'».

0.66327 – 0,663 06 = 0,000 21

1' = 60" = 0,000 21, 60" : 0,000 21 = 39 : x; x = 0,000 21 • 39 / 60 = 0,000 14

0,663 06 + 0,000 14 = 0,663 20

x = s • sen α = 247 • 0,663 27 = 283,321 63 m

Somma in piena precisione

Anche quando le calcolatrici mostravano soltanto otto (8) cifre, si poteva essere interessati ad ottenere, il risultato di una somma, ricavando tutte le cifre significative di cui il risultato era composto.

Se a quel tempo avessimo voluto eseguire la seguente somma:

```
2 537 974 328 574 +
    63 597 816 456 =
-------------------
2 601 572 145 030
```

Avremmo dovuto spezzare, ambedue gli addendi, in gruppi di cifre inferiori ad otto (8); pertanto o sette (7) o meno:

```
2 537 974        328 574
   63 597        816 456
```

Avremmo poi proceduto nel sommare i due gruppi più a destra evidenziando, nel risultato, l'eventuale riporto; nel nostro caso l'uno (1) indicato sottolineato.

```
                    328 574
2 537 974           816 456
   63 597           -------
        1 ←----- 1 145 030
---------
2 563 572
```

Avremmo quindi proceduto nel sommare i due gruppi più a sinistra, aggiungendo la cifra del riporto; unendo, infine, i due risultati scrivendoli uno di seguito l'altro.

Per cui, il risultato dell'addizione, sarebbe stato il numero: 2 563 572 145 030.

Moltiplicazione in piena precisione (1° metodo)

Anche quando le calcolatrici mostravano soltanto otto (8) cifre, si poteva essere interessati ad ottenere, il risultato di una moltiplicazione, ricavando tutte le cifre significative di cui il risultato era composto.

Iniziamo con un semplice esempio; volendo ricavare il prodotto di «x = 23 • 74», potremmo scrivere:

23 • 74 = (20 + 3) • (70 + 4) =

$= (2 \bullet 10^1 + 3 \bullet 10^0) \bullet (7 \bullet 10^1 + 4 \bullet 10^0) =$
$= (2 \bullet 10 + 3) \bullet (7 \bullet 10 + 4)$

Ora, visto che abbiamo ottenuto il prodotto di due binomi, poniamo:

$a = 2 \bullet 10 = 20;\ b = 3$
$c = 7 \bullet 10 = 70;\ d = 4$

Il prodotto, che ci interessa, si potrebbe pertanto scrivere anche:

$$(a + b) \bullet (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Ritrasformiamo le lettere in numeri e, incolonnando, otteniamo:

```
23 • 74 = ac (20 • 70) 1 400 +
          ad (20 •  4)    80 +
          bc ( 3 • 70)   210 +
          bd ( 3 •  4)    12 =
                       ------
                       1 702
```

Ovviamente, in questo caso, una qualsiasi calcolatrice avrebbe fornito tutte quante le cifre significative del risultato, dovendone visualizzare soltanto quattro (4); con l'esempio precedente si voleva soltanto introdurre la descrizione del procedimento che ci permetterà, ora, di risolvere il nostro problema.

Ora, applichiamo lo stesso metodo a due numeri di otto (8) cifre significative ciascuno; vogliamo trovare il prodotto conoscendo tutte le sedici (16) cifre significative esatte.

Volendo ricavare il prodotto di «m = 18 946 784» e «n = 70 159 908», e ricordando che possediamo una calcolatrice che visualizza soltanto otto (8) cifre, possiamo scrivere:

$m \bullet n = (1894 \bullet 10^4 + 6784) \bullet (7015 \bullet 10^4 + 9908)$
$= (a \bullet 10^4 + b) \bullet (c \bullet 10^4 + d)$

In pratica, dobbiamo ora incolonnare i prodotti parziali, separandoli in due colonne da otto (8) cifre ciascuna:

```
                                      1°       2°
18 946 784 • 70 159 908 = (ac) 13286410 00000000
                        = (ad)     1876 57520000
                        = (bc)     4758 97600000
                        = (bd)          67215872
                               -------- --------
                                       222335872
                               13293044
```

Si deve eseguire prima la somma dei numeri della colonna a destra (2°) per trovare l'eventuale riporto; in questo caso il due (2) indicato sottolineato.

Infine si uniscono i risultati delle due colonne considerando il «2» sottolineato come la cifra da riportare, e quindi aggiungere, alla colonna di sinistra (1°):

```
                                     2
18 946 784 • 70 159 908 = 1 329 304 422 335 872
                          ---------------------
                        = 1 329 304 622 335 872
```

Ora, per contro, questi problemi non esistono più.

Moltiplicazione in piena precisione (2° metodo)

Anche quando le calcolatrici mostravano soltanto otto (8) cifre, si poteva essere interessati ad ottenere, il risultato di una moltiplicazione, ricavando tutte le cifre significative di cui il risultato era composto.

Volendo ricavare il prodotto di «x = 23 758 352 • 68 238 574», potremmo scrivere:

$23\ 758\ 352 = 2 \bullet 10^7 + 3 \bullet 10^6 + 7 \bullet 10^5 + 5 \bullet 10^4 + 8 \bullet 10^3 +$
$+ 3 \bullet 10^2 + 5 \bullet 10^1 + 2 \bullet 10^0.$

$23\ 758\ 352 = 20\ 000\ 000 + 3\ 000\ 000 + 700\ 000 + 50\ 000 + 8\ 000 +$
$+ 300 + 50 + 2$

$68\ 238\ 574 = 6 \bullet 10^7 + 8 \bullet 10^6 + 2 \bullet 10^5 + 3 \bullet 10^4 + 8 \bullet 10^3 +$
$+ 5 \bullet 10^2 + 7 \bullet 10^1 + 4 \bullet 10^0 =$

$68\ 238\ 574 = 60\ 000\ 000 + 8\ 000\ 000 + 200\ 000 + 30\ 000 + 8\ 000 +$
$+ 500 + 70 + 4$

$X = (20000000 + 3000000 + 700000 + 50000 + 8000 + 300 + 50 + 2) \bullet$
$\bullet (60000000 + 8000000 + 200000 + 30000 + 8000 + 500 + 70 + 4)$

$a = 20000000,\ b = 3000000,\ c = 700000,\ d = 50000,\ e = 8000$
$f = 300 + g = 50,\ h = 2.$

```
i = 60000000, l = 8000000, m = 200000, n = 30000, o = 8000
p = 500, q = 70, r = 4.
```

Il prodotto, che ci interessa, si potrebbe pertanto scrivere anche:

```
(a + b + c + d + e + f + g + h) • (i + l + m + n + o + p + q + r) =
= ai + al + am + an + ao + ap + aq + ar + bi + bl + bm + bm + bo +
+ bp + bq + br + ci + cl + cm + cn + co + cp + cq + cr + di + dl +
+ dm + dn + do + dp + dq + dr + ei + el + em + en + eo + ep + eq +
+ er + fi + fl + fm + fn + fo + fp + fq + fr + gi + gl + gm + gn +
+ go + gp + gq + gr + hi + hl + hm + hn + ho + hp + hq + hr.
```

Ritrasformiamo le lettere in numeri e, incolonnando, otteniamo:

```
ai (20 000 000 • 60 000 000) = 1 200 000 000 000 000 +
al (20 000 000 •  8 000 000) =   160 000 000 000 000 +
am (20 000 000 •    200 000) =     4 000 000 000 000 +
an (20 000 000 •     30 000) =       600 000 000 000 +
ao (20 000 000 •      8 000) =       160 000 000 000 +
ap (20 000 000 •        500) =        10 000 000 000 +
aq (20 000 000 •         70) =         1 400 000 000 +
ar (20 000 000 •          4) =            80 000 000 =
                               -----------------------
                               1 364 771 480 000 000

bi ( 3 000 000 • 60 000 000) =   180 000 000 000 000 +
bl ( 3 000 000 •  8 000 000) =    24 000 000 000 000 +
bm ( 3 000 000 •    200 000) =       600 000 000 000 +
bn ( 3 000 000 •     30 000) =        90 000 000 000 +
bo ( 3 000 000 •      8 000) =        24 000 000 000 +
bp ( 3 000 000 •        500) =         1 500 000 000 +
bq ( 3 000 000 •         70) =           210 000 000 +
br ( 3 000 000 •          4) =            12 000 000 =
                               -----------------------
                                 204 715 722 000 000

ci ( 700 000 • 60 000 000) =      42 000 000 000 000 +
cl ( 700 000 •  8 000 000) =       5 600 000 000 000 +
cm ( 700 000 •    200 000) =         140 000 000 000 +
cn ( 700 000 •     30 000) =          21 000 000 000 +
co ( 700 000 •      8 000) =           5 600 000 000 +
cp ( 700 000 •        500) =             350 000 000 +
cq ( 700 000 •         70) =              49 000 000 +
cr ( 700 000 •          4) =               2 800 000 =
                               -----------------------
                                47 767 001 800 000

di (    50 000 • 60 000 000) =     3 000 000 000 000 +
dl (    50 000 •  8 000 000) =       400 000 000 000 +
dm (    50 000 •    200 000) =        10 000 000 000 +
dn (    50 000 •     30 000) =         1 500 000 000 +
do (    50 000 •      8 000) =           400 000 000 +
dp (    50 000 •        500) =            25 000 000 +
dq (    50 000 •         70) =             3 500 000 +
dr (    50 000 •          4) =               200 000 =
                             -----------------------
                                 3 411 928 700 000

ei (     8 000 • 60 000 000) =       480 000 000 000 +
el (     8 000 •  8 000 000) =        64 000 000 000 +
em (     8 000 •    200 000) =         1 600 000 000 +
en (     8 000 •     30 000) =           240 000 000 +
eo (     8 000 •      8 000) =            64 000 000 +
ep (     8 000 •        500) =             4 000 000 +
eq (     8 000 •         70) =               560 000 +
er (     8 000 •          4) =                32 000 =
                             -----------------------
                                   545 908 592 000
ei (     8 000 • 60 000 000) =       480 000 000 000 +
el (     8 000 •  8 000 000) =        64 000 000 000 +
```

```
em (    8 000 •    200 000) =        1 600 000 000 +
en (    8 000 •     30 000) =          240 000 000 +
eo (    8 000 •      8 000) =           64 000 000 +
ep (    8 000 •        500) =            4 000 000 +
eq (    8 000 •         70) =              560 000 +
er (    8 000 •          4) =               32 000 =
                              -----------------------
                                   545 908 592 000

fi (      300 • 60 000 000) =       18 000 000 000 +
fl (      300 •  8 000 000) =        2 400 000 000 +
fm (      300 •    200 000) =           60 000 000 +
fn (      300 •     30 000) =            9 000 000 +
fo (      300 •      8 000) =            2 400 000 +
fp (      300 •        500) =              150 000 +
fq (      300 •         70) =               21 000 +
fr (      300 •          4) =                1 200 =
                              -----------------------
                                    20 471 572 200

gi (       50 • 60 000 000) =        3 000 000 000 +
gl (       50 •  8 000 000) =          400 000 000 +
gm (       50 •    200 000) =           10 000 000 +
gn (       50 •     30 000) =            1 500 000 +
go (       50 •      8 000) =              400 000 +
gp (       50 •        500) =               25 000 +
gq (       50 •         70) =                3 500 +
gr (       50 •          4) =                  200 =
                              -----------------------
                                     3 411 928 700

hi (        2 • 60 000 000) =          120 000 000 +
hl (        2 •  8 000 000) =           16 000 000 +
hm (        2 •    200 000) =              400 000 +
hn (        2 •     30 000) =               60 000 +
ho (        2 •      8 000) =               16 000 +
hp (        2 •        500) =                1 000 +
hq (        2 •         70) =                  140 +
hr (        2 •          4) =                    8 =
                              -----------------------
                                       136 477 148

            1 364 771 480 000 000 +
              204 715 722 000 000 +
               47 767 001 800 000 +
                3 411 928 700 000 +
                  545 908 592 000 +
                   20 471 572 200 +
                    3 411 928 700 +
                      136 477 148 =
            -----------------------
            1 621 236 061 070 048
```

Infatti: 23 758 352 • 68 238 574 = 1 621 236 061 070 048

Divisione in piena precisione

Considerando sempre di possedere una calcolatrice che fornisce solo otto (8) cifre, vogliamo eseguire la seguente divisione, ottenendo tutte le cifre significative volute:

$$x = \frac{987\,646\,989\,103\,406\,109}{894\,638}$$

Scriviamo, come di consuetudine, il dividendo seguito dal divisore, ma consideriamo, per adesso, solo le prime otto (8) cifre del *dividendo*, partendo da sinistra; consideriamo, pertanto, solo il numero: 98 764 698.

Dividiamo questo numero per il *divisore* e scriviamo, sotto quest'ultimo, solo la parte intera del *quoziente*; in questo caso il: 110.

Poi si moltiplica questo primo gruppo di cifre, del *quoziente* «110», per il *divisore,* ed il risultato così ottenuto: 98 410 180, si sottrae dalle sole cifre del *dividendo* che avevamo considerato.

```
_________
987 646 989 103 406 109 : 894 638
984 101 80                -------
----------                  110
  3 545 18
```

Si abbassano ora, dal *divisore*, quante cifre occorrono a completare le otto (8) cifre; in questo caso si abbassano due cifre, il nove (9) e l'uno (1), del resto ottenuto dalla sottrazione appena eseguita.

Si ripete quindi la procedura, eseguita prima, ottenendo un nuovo gruppo di cifre per il *quoziente* (due anziché tre) che si scrive a destra di quelle già ottenute.

Infine l'ultima coppia di cifre si moltiplica per il *divisore* e si sottraggono dall'ultimo *dividendo*.

```
          ____
987 646 989 103 452 317 : 894 638
984 101 80               -------
-----------                 110 39 62 70 79 37.12
  3 545 189 1
  3 489 088 2
    ---------
     56 100 9
     55 467 556
     ----------
        633 347 45
        626 246 60
        ----------
          7 100 852 3
          7 067 640 2
          -----------
             33 212 117
             33 101 606
             ----------
                110 511 00
```

Quando, dal divisore, non vi sono più cifre da utilizzare (si sono abbassate tutte le cifre che lo compongono), si pone la virgola al dividendo e si aggiungono al resto dell'ultima sottrazione (in questo caso 33 212 117 – 33 101 606 = 110 511) tanti zeri quanti sono necessari a completare le otto (8) cifre.

Si procede pertanto seguendo il medesimo procedimento seguito fino ad ora.

Con questo procedimento, basato su un metodo iterativo (che si ripete identico illimitatamente), non vi è limite alle dimensioni del dividendo (al numero delle sue cifre).

Prime conclusioni

Come già accennato in precedenza, non si voleva qui cercare di insegnare matematica scrivendo un trattato e completo ed approfondito ed esaustivo; in queste prime paginette si è cercato soltanto di far notare che, non molti anni addietro, ciò che oggi si ottiene con la semplice pressione di un dito, un tempo, lo si poteva ottenere solo se si possedevano buone conoscenze matematiche (buone per quel tempo).

"...*Non vogliate negar l'esperienza*
di retro al sol, del mondo sanza gente
Considerate la vostra semenza
fatti non foste a viver come bruti
ma per seguir virtute e canoscenza"

Dante Alighieri (1265 – 1321)
Divina Commedia
Inferno: canto **XXVI**, versi **116-120**

Ciò che sarebbe utile sapere, ma che a scuola non si insegna più

Le divisioni con carta e penna

Nella mia esperienza, ho trovato, fra i giovani, più di uno che non sapeva come si fanno le divisioni col solo uso di carta e penna.

Calcoliamo, a mano, il risultato (il quoziente) dell'operazione: 23 754 (il divisore) diviso 21 (il dividendo).

2375 :	21	il 21 nel 2 non ci sta

2375 :	21	il 21 nel 23 ci sta una volta; si segna 1 sotto il 21
21	1	1 • 21 = 21 che si scrive sotto il 23
27		23 – 21 = 2; si abbassa il 7

2375 :	21	il 21 nel 27 ci sta una volta; si aggiunge 1 a destra del primo 1
21	11	1 • 21 = 21 che si scrive sotto il 27
27		27 – 21 = 6; si abbassa il 5
21		
65		

2375 :	21	il 21 nel 65 ci sta 3 volte; si aggiunge 3 a destra del secondo 1
21	113,	3 • 21 = 63 che si scrive sotto il 65
27		65 - 63 = 2
21		sono finite le cifre del numero 2 375
65		si mette la virgola e si abbassa uno zero
63		
20		

2375 :	21	il 21 nel 20 non ci sta; si aggiunge uno zero dopo la virgola
21	113,0	si abbassa un altro zero
27		
21		
65		
63		
200		

2375 :	21	il 21 nel 200 ci sta 9 volte; si aggiunge un 9 al quoziente
21	113,09	9 • 21 = 189 che si scrive sotto il 200
27		200 – 189 = 11
21		
65		e via proseguendo . . .
63		
200		
189		
11		se ci si ferma qui, 11 è il resto della divisione

Il risultato è pertanto: 2 375 / 21 = 113.09 con resto 0,11

Osservazioni

In verità il resto è la quantità di dividendo che è *avanzata* dalla divisione, cioè quella quantità che non è stata possibile dividere per il divisore affinché il risultato rimanga nell'insieme dei numeri interi; in pratica, Il resto di una divisione denota la quantità da sottrarre a un dividendo al fine di renderlo divisibile per un divisore.

Nel nostro caso:	2 375 / 21 = 113,09		
	113 • 21 = 2 373	2 375 - 2 373 = 2	il resto è: 2

La prova del nove

La ***prova del nove*** è, per molti studenti ed anche per qualche laureato, un modo di dire usato dai ***vecchi***, chissà poi perché.

Pochi sanno che esso è un metodo, insegnato nelle scuole d'un tempo, per verificare la correttezza o meno e di moltiplicazioni e di somme e di sottrazioni.

Se la prova non riesce, il risultato dell'operazione è *sicuramente* sbagliato; se la prova riesce, il risultato dell'operazione è *forse* giusto.

Vediamo come funziona con la ***moltiplicazione***:
abbiamo eseguito il prodotto di 375 • 38 = 14 250

Ora, ad ogni numero presente nell'operazione, sostituiamo quello formato dalla somma delle sue cifre; se la somma così ottenuta ha più di una cifra, sommiamo anche *quelle* cifre, proseguendo così fino a che non arriviamo a una singola cifra.
Avremo pertanto:

375: (3 + 7 + 5 = 15), (1 + 5 = **6**).
38: (3 + 8 = 11), (1 + 1 = **2**).
14250: (1 + 4 + 2 + 5 + 0 = 12), (1 + 2 = **3**). (cifra del risultato)

Facciamo il prodotto delle cifre ottenute dai fattori e, se il risultato ha più di una cifra, sommiamo le cifre del risultato fino ad averne una soltanto:

6 • 2 = 12: (1 + 2 = **3**).

Se questa cifra è diversa da quella ottenuta dal risultato dell'operazione, il risultato è, come abbiamo detto, sicuramente sbagliato; se, come in questo caso, questa cifra è identica a quella del risultato dell'operazione, forse il risultato è corretto.
Si è detto «*forse il risultato è corretto*» e la ragione è semplice: se si fossero sbadatamente scambiate di posto due cifre (ad esempio: si fosse ottenuto come risultato «14 520» al posto del risultato corretto «14 250»), la cifra (somma finale delle cifre del risultato) non sarebbe cambiata (1 + 4 + 5 + 2 + 0 = 12; 1 + 2 = **3**) rimanendo sempre 3; il risultato sarebbe stato scorretto, ma la verifica avrebbe avuto successo.
Parimenti sarebbe avvenuto se si fosse scambiato uno *zero* «0» con un *nove* «9», o viceversa (ad esempio: se si fosse ottenuto «14 529» al posto di «14 520»); anche in questo caso l'esito della prova sarebbe stato positivo (1 + 4 + 5 + 2 + 9 = 21; 2 + 1 = **3**), ma il risultato sarebbe stato ugualmente scorretto.
Pertanto, non riponete una *fiducia illimitata* in questo procedimento; non tutti gli errori, infatti, possono essere scovati.

Vediamo come funziona con la ***somma***:
abbiamo eseguito l'addizione di 238 + 132 = 370.

avremo pertanto:

238: (2 + 3 + 8 = 13), (1 + 3 = **4**).
132: (1 + 3 + 2 = **6**).
370: (3 + 7 + 0 = 10), (1 + 0 = **1**) (cifra del risultato)

Facciamo la somma delle cifre ottenute dagli addendi e se il risultato ha più di una cifra, sommiamo le cifre del risultato fino ad averne una soltanto:

4 + 6 = 10: (1 + 0 = **1**).

Questa cifra è identica a quella ottenuta dal risultato dell'operazione, e pertanto l'operazione forse è giusta.

Vediamo come funziona con la ***differenza***:
abbiamo eseguito la sottrazione di 23 - 7 = 16.

avremo pertanto:

23: (2 + 3 = **5**). (minuendo)
7 = **7**. (sottraendo)
16: (1 + 6 = **7**) (cifra del risultato)

Facciamo la differenza fra la cifra ottenuta dal minuendo con quella ottenuta dal sottraendo e se il risultato ha più di una cifra, sommiamo le cifre del risultato fino ad averne una soltanto:
Nella differenza, quando la cifra ottenuta dal *minuendo* è inferiore di quella ottenuta dal *sottraendo*, a quest'ultimo gli si deve sommare un «9».

(5 + 9) – 7 = **7**.

Questa cifra è identica a quella ottenuta dal risultato dell'operazione, e pertanto l'operazione forse è giusta.

Come qualcuno ha già capito, la *prova del nove* non funziona con la divisione, ma in questo caso si può ricorrere ad un banale espediente; si rifà il calcolo al contrario.
Nel caso si debba verificare la divisione 2 326 / 17 = 136 con resto 14, si può fare la prova con 136 • 17: (1 + 3 + 6 = 10), (1 + 0 = **1**) e (1 + 7 = **8**), quindi 1 • 8 = 8.
Gli sommiamo la somma delle cifre del resto (1 + 4 = 5) ed otteniamo, come risultato finale 8 + 5 = 13: (1 + 3 = 4); controlliamo se il risultato è uguale alla somma delle cifre del divisore (2 + 3 + 2 + 6 = 13), (1 + 3 = 4) e tiriamo un *sospiro di sollievo*: è uguale.

Stima iniziale della radice quadrata

Dato un qualunque numero intero, si può stimare facilmente da quante cifre è composta la parte intera della sua radice quadrata e qual è la sua prima cifra.

Prendiamo ad esempio il numero «326 457»; come possiamo dire che la parte intera della sua radice quadrata ha 3 cifre e che la prima cifra è il 5: $\sqrt{326\,457} = 5\ \_\ \_\ .\ \_\ \_$?

Se andiamo a verificare le nostre affermazioni, con una calcolatrice scientifica, troveremo: $\sqrt{326457} = 571.364\ 16$, in ottimo accordo con quanto detto.

Per capire come si può fare, dividiamo il numero «326 457» in gruppi di due cifre a partire dalle unità: «32 64 57».

Le coppie di cifre sono tre: 32, 64, 57, e pertanto le cifre della parte intera della radice quadrata devono essere tre.

Ugualmente per il numero «68 348» (6 83 48) i gruppi di cifre sono tre, anche se l'ultimo gruppo, partendo da destra, è formato soltanto da una sola cifra; in questo caso la prima cifra della parte intera della radice quadrata è 2, si ha, pertanto, $\sqrt{68\,348} = 2\ \_\ \_\ .\ \_\ \_$? (come si può verificare facilmente con una calcolatrice scientifica: $\sqrt{68\,348} = 261.434\ 50$).

La prima cifra del risultato è la radice quadrata del gruppo più a sinistra, che come detto può essere costituito o da una o da due cifre.

Riprendendo come esempio il numero «326 457», che diviso in gruppi di due cifre a partire dalle unità, diviene «32 64 57»; il gruppo più a sinistra è il «32».

La prima cifra del risultato, come già detto, sarà il numero più grande il cui quadrato non eccede il «32»; esso risulterà il «5», il cui quadrato è «25» (quello di «6» è «36»).

Da osservare che, essendo il numero del quale si vuole trovare la radice quadrata è scomposto in gruppi di due cifre, il più alto numero di cui dovremmo stimare la radice quadrata, per ottenere la prima cifra del risultato è «99»; a mente ci si arriva.

Calcolo della radice quadrata con carta e penna

Quest'algoritmo si applica ad un numero intero in scrittura posizionale in base 10, ma può essere adattato ad una scrittura posizionale in qualsiasi base; il come lo vedremo in seguito, dopo la presentazione del calcolo posizionale in **base 10**.

Per eseguire il calcolo s'inizia distinguendo, nella scrittura in **base 10** del radicando, gruppi di due cifre consecutive, partendo dal gruppo formato dalla cifra delle unità e da quella delle decine; il gruppo delle cifre di maggior peso può ridursi ad una cifra (come nell'esempio sia che abbiamo visto sia che segue).

È comodo scrivere il risultato in costruzione, collocando ciascuna cifra del risultato sopra un corrispondente gruppo di cifre del radicando: infatti, il numero «L» di cifre decimali del risultato è uguale al numero dei gruppi di cifre del radicando.

Si opera con tre variabili intere correnti: il risultato in costruzione «x», il resto «r» e una cifra «*d*» da accodare alla precedente scrittura di «x»; inizialmente sia «x» sia «r» sono poste a «0» e si procede a ripetere «*n*» volte il seguente blocco d'istruzioni.

1. Modifica la scrittura del resto «r» accodandole il gruppo di cifre più significativo (quelle più a sinistra) non ancora usato; chiamiamo «*c*» il numero così ottenuto (valore corrente).
2. Trova la più grande cifra «*d*» tale che: $y = d(20 \cdot x + d)$ non superi «*c*»; accoda questa nuova cifra alla scrittura del risultato «x».
3. Sottrai «y» da «r» e ottieni così il nuovo resto.

Esempio: trovare la radice quadrata di 1 597 899.

	1 2 6 4		
	01 59 78 99	1 • (20 • 0 + 1) = 1;	la prima cifra della soluzione è 1
	01		
X = **1**	00 59	2 • (20 • **1** + 2) = 44;	la seconda cifra della soluzione è 2
	00 44		
X = **12**	15 78	6 • (20 • **12** + 6) = 1476;	la terza cifra della soluzione è 6
	14 76		
X = **126**	1 02 99	4 • (20 • **126** + 4) = 10096;	la quarta cifra della soluzione è 4
	1 00 96		
X = **1264**	02 03	L'algoritmo termina;	la parte intera è **1264** ed il resto è **293.**

Volendo calcolare anche i decimali, è sufficiente continuare il procedimento aggiungendo ogni volta due zeri, ogni coppia di zeri permette di trovare un ulteriore decimale della radice quadrata.

Riprendiamo il calcolo eliminando la parte che non ci interessa più.

```
           1  2  6  4. 0  8
         ---------------------
        01 59 78 99
 . . . . . . . . . . . .
              1 00 96
              -------
X = 1264     02 03 00       0 • (20 • 1 264 + 0);     la prima cifra decimale è 0
                0 00 00
                -------
X = 12640       2 03 00 00  8 • (20 • 12 640 + 8);    la seconda cifra decimale è 8
                2 02 24 64
                ----------
                   00 75 36    e così continuando
```

La radice quadrata di **1 597 899** è pertanto **1 264,08**... con due cifre decimali; il resto, in questo momento, è di **0,753 6**.

Ricordiamo qualche nozione

1) la notazione posizionale in base 10

Noi scriviamo i numeri utilizzando il sistema posizionale in base dieci; quando scriviamo il numero «**4 728**» attribuiamo un significato preciso alla **posizione** di ciascuna cifra.

Siamo, infatti, in grado di dire che il numero «4 728» è composto da «**4**» migliaia, «**7**» centinaia, «**2**» decine e «**8**» unità.

2) la scrittura dei numeri in forma polinomiale

Ogni numero intero può essere quindi scritto in una forma, detta ***forma polinomiale***, perché si tratta di un vero e proprio *polinomio.*

$$4728 = 1000 \cdot 4 + 100 \cdot 7 + 10 \cdot 2 + 8$$

3) La formula per il calcolo del quadrato di un binomio

Consideriamo il caso di un binomio.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Applicando questa formula per calcolare il quadrato di un numero intero di 2 cifre scritto in forma polinomiale, si ottiene, ad esempio:

$$47^2 = (10 \cdot 4 + 7)^2 = 100 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 + 7^2$$

$$47^2 = 100 \cdot 4^2 + 7 \cdot (20 \cdot 4 + 7)$$

In generale:

$$(10 \cdot a + b)^2 = 100 \cdot a^2 + b \cdot (20 \cdot a + b)$$

Per adattare l'algoritmo ad una base «b» diversa da «10», basta sostituire la precedente definizione della «y» con la: $y = d \cdot (2 \cdot b \cdot X + d)$.

Usando la base binaria «b = 2», l'algoritmo si semplifica molto, perché nel passo 2, per trovare la più grande cifra binaria «d» tale che $y = d \cdot (4 \cdot x + d) < = c$, si deve provare solo con d = 1, cioè stabilire se $1 \cdot (4 \cdot x + 1) \leq c$; se la disuguaglianza è verificata, allora la nuova cifra del risultato è «1», altrimenti sarà necessariamente «0».

Istruttivo, ma anche divertente.

Calcolo della radice quadrata senza il tasto «√»

Se siamo in possesso di una calcolatrice con le sole quattro operazioni e non ci ricordiamo il metodo per estrarre la radice quadrata di un numero «n» con carta e penna, possiamo ricorrere al ***metodo iterativo organizzato***.

Prendiamo in considerazione la seguente *relazione ricorsiva*:

$$x_{r+1} = \frac{1}{2} \bullet \left(x_r + \frac{n}{x_r}\right), \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

In cui: n = numero intero di cui si vuole ricavare il valore della radice quadrata – x_r = la prima stima approssimativa, eseguita dall'operatore, e successivamente le stime, sempre più approssimate, ottenute dal calcolo.

Vogliamo trovare la radice quadrata di: n = **3 820**

Una prima stima molto approssimativa potrebbe essere $x_r = 60$; (60 • 60 = 3 600) operazione che si esegue anche a mente.

Osservazioni

Come già sappiamo la radice quadrata di «3 820» è un numero di due cifre (3 820 può essere diviso in due gruppi di due cifre: 38 20) e la prima cifra deve essere un «6»; poniamo come seconda cifra uno zero «0» ed abbiamo il risultato approssimato per difetto.

Impostiamo la relazione ricorsiva:

$$x_0 = \frac{1}{2} \bullet \left(60 + \frac{3\,820}{60}\right) = 61{,}8\overline{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \bullet \left(61.8\overline{3} + \frac{3\,820}{61.8\overline{3}}\right) = 61{,}806\,154$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \bullet \left(61{,}806\ 154 + \frac{3\ 820}{61.806\ 154}\right) = 61{,}806\ 148$$

A questo punto, nel caso volessimo il risultato con la precisione di quattro (4) cifre decimali, possiamo fermarci; la quarta cifra decimale non ha subito variazioni, nel passare da x_1 a x_2 e pertanto è l'ultima cifra, sicura, del risultato.

Se provassimo ad estrarre la radice quadrata di «n = 3 820» servendoci di una calcolatrice con il tasto «√», troveremo: n = 61,806 1485 6; sarebbero esatte anche la quinta e la sesta cifra, ma questo a noi non era dato di sapere.

Numeri quadratici

I numeri quadratici sono quei numeri che sono il quadrato di un numero intero; il matematico bolognese **Raffaele Bombelli** (1530 -1572), ha fornito alcune regole per riconoscerli.

A conoscere li numeri quadrati per pratica.

"Molte volte accade nell'operare di havere a trovare il lato di un numero (= la radice quadrata), che non havendo lato, l'operante non se ne ha a servire; e assai volte accade ne i numeri grandi, poi che si è affaticato assai invano, si trova tal numero non haver lato, per non essere quadrato, e hassi gettato il tempo e l'opera; però, per fuggire questo inconveniente, ho pensato di dar certe regole che assai facilitaranno la strada a conoscere quali siano li numeri quadrati.".

Raffaele Bombelli, Opera su Algebra, 1550.

Tutti i numeri quadrati finiscono con una delle seguenti cifre: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Se un numero termina con: 2, 3, 7, 8 non può essere un quadrato.

Se si applica la prova del 9 ad un numero e il risultato è uno di questi: 1, 4, 7, 0, allora il numero non è un quadrato.

Se termina per: 2, 3, 5, 6, 8, 9, allora ***potrebbe*** essere un quadrato.
36 (3 + 6 = 9), è, infatti il quadrato di sei.
12 (1 + 2 = 3), ma non è un quadrato.
a (2 • 2 = 4) non si può applicare la prova del 9.

Se un quadrato termina per 5 allora: se il 5 non è preceduto da un 2 e il due non è a sua volta preceduto da una cifra pari, allora non è un quadrato.

Se un numero termina con 9 oppure con 1 e la penultima cifra non è un numero pari, allora non è un quadrato.

Se un numero termina con 4, ma il 4 non è preceduto da una cifra pari, allora non è un quadrato.

Se un numero termina con 6, ma il 6 non è preceduto da una cifra dispari, allora non è un quadrato.

Se un numero termina con 0, ma gli zeri terminali sono in numero dispari, allora non è un quadrato.

Conversione di un numero decimale periodico in frazione

Un numero decimale periodico è un numero che, escluse le cifre che precedono la virgola (quelle che formano la *parte intera*), escluse, eventualmente, le prime cifre alla destra della virgola (quelle che formano l'*antiperiodo*), le altre cifre si ottengono ripetendo illimitatamente un insieme di «x» cifre, disposte sempre nello stesso ordine (quelle che costituiscono il periodo).

Ad esempio: nel numero 25,427 282 828 28 . . ., «**25**» è la *parte intera*, «**427**» è l'*antiperiodo*, «**28**» è il *periodo* (perché «28» è la sequenza di cifre che si ripete all'infinito); in una notazione più corretta, si scrive: $25.427\overline{28}$.

Come prima operazione, al numero costituito dalle cifre sia della parte ***intera*** sia dell'***antiperiodo*** sia del ***periodo***, senza considerare la virgola «**2 542 728**», si sottrae il numero costituito sia dalla parte ***intera*** sia dell'***antiperiodo***, anche in questo caso senza considerare la virgola «**25 427**».

Nn = 2 542 728 – 25 427 = 2 517 301

Nn, è il ***numeratore*** della frazione che stiamo cercando.

Il ***denominatore*** è un numero «Nd» costituito da tanti nove «9», quanti sono le cifre del *periodo* (nel nostro caso due «9») e da tanti zeri «0», quante sono le cifre dell'*antiperiodo* (nel nostro caso tre «0»).

Si ha pertanto $N = \dfrac{2\ 542\ 728 - 25\ 427}{99\ 000} = \dfrac{2\ 517\ 301}{99\ 000} = 25{,}427\overline{28}$

Minimo comune multiplo (mcm)

Il **m**inimo **c**omune **m**ultiplo è il più piccolo tra i multipli comuni; parimenti è il numero più piccolo che è divisibile per tutti i numeri che si sta considerando:

Esempi:

Scomponiamo ciascun numero in fattori primi e i risultati indichiamoli a fianco, in parentesi.

Consideriamo i numeri: «2», «3», «4», «6».
2 (2), 3 (3), 4 (2^2), 6 ($2 \cdot 3$), il **mcm** è: $2^2 \cdot 3 = 12$

Consideriamo i numeri: «2», «8», «12».
2 (2), 8 (2^3), 12($2^2 \cdot 3$), **mcm** è: $2^3 \cdot 3 = 24$

Il **mcm** è il prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni, presi col maggiore esponente.

Massimo Comune Divisore (MCD)

Il **m**assimo **c**omune **d**ivisore è il più grande tra i divisori comuni; parimenti è il più grande numero che divide i numeri che si stanno considerando.

Esempi:

Scomponiamo ciascun numero in fattori primi e i risultati indichiamoli a fianco, in parentesi.

Consideriamo i numeri: «4», «6», «10».
4 (2^2), 6 ($2 \cdot 3$), 10 ($2 \cdot 5$); il **MCD** è: 2

Consideriamo i numeri: «30», «12», «18».
30 ($2 \cdot 3 \cdot 5$), 12 ($2^2 \cdot 3$), 18 ($2 \cdot 3^2$), il **MCD** è: $2 \cdot 3 = 6$

Consideriamo i numeri: 4, 6, 15.
4 (2^2), 6 ($2 \cdot 3$), 15 ($3 \cdot 5$); il **MCD** è: 1

Il **MCD** è il prodotto dei fattori comuni, presi col minore esponente.
Nel caso non vi siano fattori comuni sarà: MCD = 1 e i numeri si diranno primi fra loro.

MCD & mcm

Per la ricerca sia del ***minimo comune multiplo*** sia del massimo comun divisore si sono utilizzati i metodi più comuni; nell'**Appendice «r»** *Ancora e sul MCD e sul mcm*, a pagina 102, vengono presi in esame altri metodi con l'aggiunta di qualche curiosità.

Conversione di numeri da base «10» a base «n»

La numerazione decimale (in base «10») utilizza appunto dieci cifre per esprimere un numero, ma lo stesso numero può essere espresso in una notazione che utilizza un numero di cifre differente (in base «n»).

Conversione da base 10 (numeri decimali) a base 16 (numeri esadecimali$_{16}$)

Convertiamo il numero decimale «193 357» nel numero esadecimale «$?_{16}$».

Esempio:
```
193357 : 16   = 12084    con resto 13
 12084 : 16   =   755    con resto 4
   755 : 16   =    47    con resto 3
    47 : 16   =     2    con resto 15
```

193 357 = $2F34D_{16}$ (vedi oltre in: **Precisazioni**)

L'operazione termina quando il risultato dell'ultima divisione (nel nostro caso il «2») è inferiore al dividendo (nel nostro caso il «16»); il risultato finale è composto dalle cifre dell'ultima divisione (nel nostro caso il «2») e poi, in successione, da quelle dei resti, andando dal basso verso l'alto (nel nostro caso: «15», «3», «4», «13»).

I numeri a due cifre devono essere convertiti in lettere utilizzando la tabella, in basso, delle «**equivalenze [1]**»; il numero 2-15-3-4-13 diviene pertanto 2-F-3-4-D

Il ***pedice***, dopo un numero, indica la sua base (il $_{16}$ dopo il 2F34D, indica appunto che il numero è espresso in notazione esadecimale); per i numeri espressi in notazione decimale, il pedice si omette.

Precisazioni

Da notare che, forse inaspettatamente, nel resto di «193 357 / 16» e di «47 / 16» compaiono due cifre; potrebbero parimenti comparire due cifre anche nel risultato dell'ultima divisione (considerando che l'operazione termina quando il risultato dell'ultima divisione è inferiore al dividendo; se il risultato dell'ultima divisione fosse stato ad esempio «14», l'operazione sarebbe terminata, e quattordici ha due cifre).

Si deve procedere pertanto a scambiare ogni numero a due cifre con le equivalenti lettere dell'alfabeto.

Equivalenze [01]					
10 = A	11 = B	12 = C	13 = D	14 = E	15 = F

Questo specchietto ci servirà ancora, più volte, per cui è bene memorizzarlo.

Conversione da base 10 (numeri decimali) a base 8 (numeri ottali$_8$)

Convertiamo il numero decimale «132 978» nel numero ottale «?$_8$».

Esempio:

```
132978 : 8    = 16622      con resto 2
 16622 : 8    =  2077      con resto 6
  2077 : 8    =   259      con resto 5
   259 : 8    =    32      con resto 3
    32 : 8    =     4      con resto 0
```

132 978 = 403 562$_8$

Per quanto riguarda sia il momento in cui termina l'operazione sia il modo in cui si determinano le cifre del risultato sia il significato del pedice «$_8$», valgono le stesse precisazioni fornite in precedenza; adesso, ovviamente, la tabella delle **equivalenze [01]** non serve.

Conversione da base 10 (numeri decimali) a base 2 (numeri binari$_2$)

Convertiamo il numero decimale «132 978» in un numero binario «?$_2$».

Esempio:

```
132978 : 2    = 66489      con resto 0
 66489 : 2    = 33244      con resto 1
 33244 : 2    = 16622      con resto 0
 16622 : 2    =  8311      con resto 0
  8311 : 2    =  4155      con resto 1
  4155 : 2    =  2077      con resto 1
  2077 : 2    =  1038      con resto 1
  1038 : 2    =   519      con resto 0
   519 : 2    =   259      con resto 1
   259 : 2    =   129      con resto 1
   129 : 2    =    64      con resto 1
    64 : 2    =    32      con resto 0
    32 : 2    =    16      con resto 0
    16 : 2    =     8      con resto 0
     8 : 2    =     4      con resto 0
     4 : 2    =     2      con resto 0
     2 : 2    =     1      con resto 0
```

132 978 = 100000011101110010$_2$

Conversione di numeri da base «n» a base «10»

Parimenti al metodo di conversione appena esaminato, possiamo eseguire l'operazione opposta, seguendo un metodo, ugualmente semplice, per passare da un numero in base «n» ad un numero decimale in base «10».

Conversione da base 2 (numeri binari$_2$) a base 10 (numeri decimali)

Convertiamo il numero binario «100000011101110010$_2$» nel numero decimale «?».

Esempio:

$$
\begin{array}{llr}
0 \bullet 2^{0} & = & 0\ + \\
1 \bullet 2^{1} & = & 2\ + \\
0 \bullet 2^{2} & = & 0\ + \\
0 \bullet 2^{3} & = & 0\ + \\
1 \bullet 2^{4} & = & 16\ + \\
1 \bullet 2^{5} & = & 32\ + \\
1 \bullet 2^{6} & = & 64\ + \\
0 \bullet 2^{7} & = & 0\ + \\
1 \bullet 2^{8} & = & 256\ + \\
1 \bullet 2^{9} & = & 512\ + \\
1 \bullet 2^{10} & = & 1024\ + \\
0 \bullet 2^{11} & = & 0\ + \\
0 \bullet 2^{12} & = & 0\ + \\
0 \bullet 2^{13} & = & 0\ + \\
0 \bullet 2^{14} & = & 0\ + \\
0 \bullet 2^{15} & = & 0\ + \\
0 \bullet 2^{16} & = & 0\ + \\
1 \bullet 2^{17} & = & \underline{131072\ =} \\
 & & 132978
\end{array}
$$

100000011101110010$_2$ = 132 978

Conversione da base 8 (numeri ottali$_8$) a base 10 (numeri decimali)

Convertiamo il numero ottale «403 562$_8$» nel numero decimale «?».

Esempio:

$$\begin{array}{rcll} 2 \bullet 8^0 & = & 2 & + \\ 6 \bullet 8^1 & = & 48 & + \\ 5 \bullet 8^2 & = & 320 & + \\ 3 \bullet 8^3 & = & 1536 & + \\ 0 \bullet 8^4 & = & 0 & + \\ 4 \bullet 8^5 & = & \underline{131072} & = \\ & & 132978 & \end{array}$$

$403\ 562_8$ = 132 978

Conversione da base 16 (numeri esadecimali$_{16}$) a base 10 (numeri decimali)

Convertiamo il numero esadecimale «$2F34D_{16}$» nel numero decimale «?».

Vi ricordate dello specchietto che dovevate memorizzare? (vi ricordate almeno in quale pagina andare a cercarlo?); andate a guardare in fondo alla pagina 13.

Ricordiamo qui solo ciò che ci interessa: D = 13, F = 15.

Esempio:

$$\begin{array}{rcll} 13 \bullet 16^0 & = & 13 & + \\ 4 \bullet 16^1 & = & 64 & + \\ 3 \bullet 16^2 & = & 768 & + \\ 15 \bullet 16^3 & = & 61440 & + \\ 2 \bullet 16^4 & = & \underline{131072} & + \\ & & 193357 & \end{array}$$

$2F34D_{16}$ = 193 357

Una scorciatoia

Per passare dalla numerazione esadecimale a quella binaria, o viceversa, non è necessario trovare prima il valore in decimale, come passaggio intermedio, si può eseguire la conversione, infatti, direttamente dall'una all'altra.

Conversione da base 2 (numeri binari$_2$) a base 16 (numeri esadecimali$_{16}$)

Per passare da *binario* a *esadecimale*, si devono raggruppare i bit, del numero binario, a quattro a quattro e far corrispondere ad ogni gruppo l'equivalente cifra esadecimale secondo la seguente tabella delle «**Equivalenze [2]**».

Convertiamo il numero binario «110011011101001_2» nel numero esadecimale «$?_{16}$».

Esempio

Raggruppiamo i bit (le cifre) del numero binario in gruppi di quattro cifre, a partire da destra: 110 0110 1110 1001.

Infine ad ogni gruppo di quattro cifre, sostituiamo la corrispondente cifra esadecimale come dallo specchietto seguente.

Equivalenze [2]			
0000 = 0	0001 = 1	0010 = 2	0011 = 3
0100 = 4	0101 = 5	0110 = 6	0111 = 7
1000 = 8	1001 = 9	1010 = A	1011 = B
1100 = C	1101 = D	1110 = E	1111 = F

Dallo specchietto precedente si ha: 1001 = 9, 1110 = E, 0110 = 6, 110 = 6.

Si ha pertanto: **$110011011101001_2 = 66E9_{16}$**

Conversione da base 16 (numeri esadecimali$_{16}$) a base 2 (numeri binari$_2$)

Per passare da esadecimale a binario, ad ogni cifra esadecimale, si deve far corrispondere l'equivalente gruppo di quattro cifre binarie (utilizzando sempre lo specchietto).

Convertiamo il numero esadecimale «$2F34D_{16}$» nel numero binario «$?_2$»

Esempio

Sostituiamo ogni cifra esadecimale coll'equivalente groppo di quattro cifre binarie.

Dallo specchietto precedente si ha: D = 1101, 4 = 0100, 3 = 0011, F = 1111, 2 = 0010.

Si ha pertanto: **$2F34D_2 = 101111001101001101_2$**

Gli zeri più a sinistra, del gruppo di quattro cifre più a sinistra, vanno soppressi.

Ciò che a scuola non si è mai insegnato,
ma . . . fanno bene a non insegnarlo

Il sistema Romano antico

La numerazione ***originale Romana antica*** si presentava come nella [tab. 01]

1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	500000
I	V	X	L	C	I)	(I)	I))	((I))	I)))	(((I)))	I))))

[tab. 01]

In seguito il segno «I)» si semplificò in una «D» ed il segno «(I)» in una «M»; fu introdotta inoltre anche la notazione che fa uso dei segni a sinistra, che sottraggono nel caso rappresentino valori inferiori del segno che gli è alla destra [tab. 01].

Un metodo per moltiplicare

Ammettiamo di voler trovare il prodotto fra due numeri interi, il «19» ed il «47».

S'inizia con lo scrivere su due colonne separate i numeri 1 (nella colonna 1°) e «47» (nella colonna 2°); il «19» è minore del «47», ed è per questo che nella seconda colonna utilizziamo il «47».

I due numeri sono raddoppiati, ottenendo la coppia «2» e «94», che si scrive sotto a ciascun corrispettivo numero.

Si prosegue così, a raddoppiare i valori, fino a che il numero della prima colonna arrivi a superare il *moltiplicando* «19».

A questo punto, il processo si ferma, ignorando inoltre l'ultimo risultato.

Adesso cerchiamo di capire come si può ottenere il numero «19» mediante la somma dei valori che si trovano nella prima colonna.

L'unico modo per poter ottenere «19» è eseguendo la somma: 1 + 2 + 16 = 19; da notare che esiste uno ed un solo gruppo di numeri che fornisce come somma il numero 19.

Sommando i corrispettivi valori presenti nella seconda colonna, avremo il risultato cercato: 47 + 94 + 752 = 893.

1°	2°		
1*	47*		
2*	94*	1 + 2 + 16 = 19	
4	188		19 • 47 = 893
8	376	47 + 94 + 752 = 893	
16*	752*		

Con questo modo di operare si sta considerando la scomposizione di «19» in base «2», per prendere poi i corrispondenti valori relativi al «47».

La scomposizione di 19 è:19 = $2^0 + 2^1 + 2^4$, e nell'eseguire la somma si selezionano i valori $(2^0 + 2^1 + 2^4) \cdot 47$, corrispondenti a $(1 + 2 + 16) \cdot 47 = 893$.

Semplice, elementare, geniale, anche se un po' lungo.

Un metodo per dividere

Ammettiamo di voler trovare il quoziente fra due numeri interi: il «585» ed il «15»; in questo caso anche il quoziente deve essere un numero intero.

S'inizia con lo scrivere su due colonne separate il denominatore «15» (nella colonna 1°) e «1» (nella colonna 2°).

I due numeri sono raddoppiati, ottenendo la coppia «30» e «2», che si scrive sotto a ciascun corrispettivo numero.

Si prosegue così, a raddoppiare i valori, fino a che il numero della prima colonna arrivi a superare il *divisore* «585».

A questo punto, il processo si ferma, ignorando inoltre l'ultimo risultato.

1°	2°		
15*	1*		
30*	2*	15 + 30 + 60 + 480 = 585	
60*	4*		585 / 15 = 39
120	8	1 + 2 + 4 + 32 = 39	
240	16		
480*	32*		

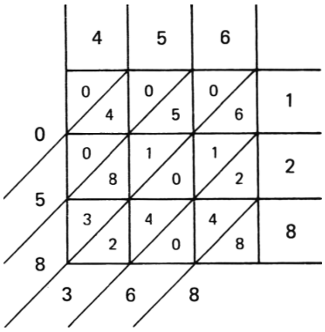
Adesso cerchiamo di capire come si può ottenere il numero «585» mediante la somma dei valori che si trovano nella prima colonna.

L'unico modo in cui si può ottenere il risultato di «585» è sommando i numeri, con l'asterisco della prima colonna: «15 + 30 + 60 + 480 = 585».

Sommiamo quindi i numeri corrispondenti della seconda colonna: «1 + 2 + 4 + 32 = 39» e troviamo il risultato cercato.

Un secondo metodo per moltiplicare

Il metodo **Gelosia** ha avuto origine in *india* e successivamente, nel tardo medioevo, si è diffuso e tra gli *arabi* e tra i *cinesi* e tra i *persiani*.



[fig. 05]

Nel corso del XIV secolo è stato introdotto in Italia; qui è stato chiamato ***gelosia*** per la sua somiglianza con un tipo di grata, allora molto comune sulle finestre italiane.

Il metodo consiste nel tracciare preventivamente una griglia come in [fig. 05]; nel disporre ogni cifra del moltiplicando in cima ad ogni colonna e ogni cifra del moltiplicatore accanto ad ogni fila.

Si moltiplica quindi ogni cifra delle colonne con quelle delle righe e si riporta, il risultato, nelle rispettive caselle della matrice; le decine si scrivono al di sopra della diagonale e le unità al di sotto di quest'ultima.

Il risultato finale (il prodotto fra i due numeri) si ottiene sommando le cifre poste lungo ogni diagonale, a partire dall'angolo inferiore destro; ogni cifra da riportare deve essere considerata parte della diagonale seguente.

In [fig. 05] è riportato l'esempio del prodotto fra «456» è «128» che fornisce come risultato «58 368».

Gli ossi di Napier

Nel 1617 il matematico scozzese **John Napier**, detto **Nepero** (1550 – 1617) inventò uno dei primi strumenti di calcolo, un abaco conosciuto appunto come: ***gli ossi di Napier***.

Questo sistema di calcolo, derivato certamente dal metodo «*Gelosia*», è stato introdotto in Italia nel XIV secolo.

Questo strumento, ovviamente per i suoi tempi, era perfettamente adeguato al suo compito; per la sua efficienza, in diversi luoghi, fu utilizzato fino al XX secolo.

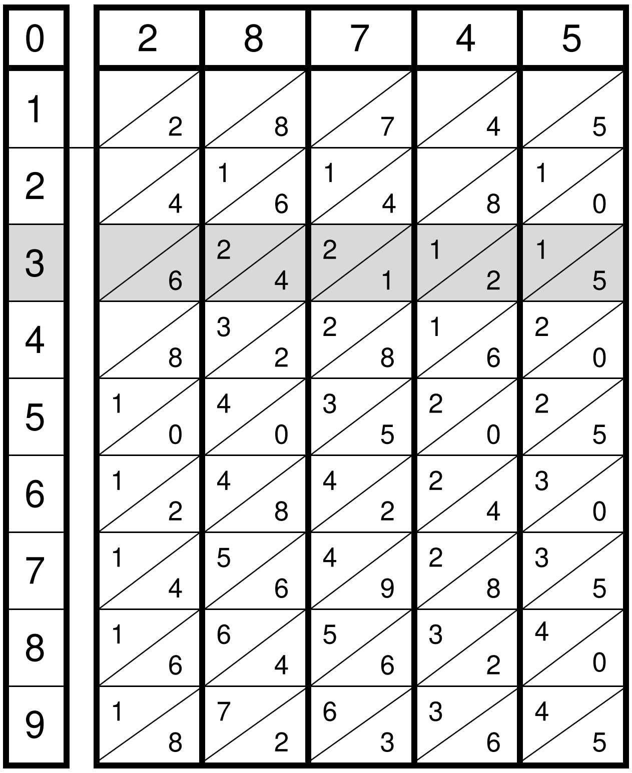
Lo strumento è una sorta di tabella di moltiplicazione, costituita da dieci barrette di legno, numerate dallo zero al nove (0 ÷ 9) [fig. 06].

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	3	6	9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	4	8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/4
8	8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

[fig. 06]

La moltiplicazione (primo caso)

Per comprendere meglio l'uso di questo abaco, vediamo, come esempio, la moltiplicazione: **28 745 • 3** (un numero a più cifre per un numero ad una cifra) [fig. 07].



[fig. 07]

Si devono prendere in considerazione le barre corrispondenti alle cinque cifre del primo numero.

Nel caso le barrette, dall'uno al nove, siano mobili, si disporranno in sequenza le sole barrette corrispondenti alle cinque cifre del primo numero; prima quella del «2», poi quella dell'«8», poi quella del «7», poi quella del «4», poi quella del «5».

Per moltiplicare il numero 28 745 per «3», si prendono i numeri presenti nella fila «4»:

```
0 / 6  2 / 4  2 / 1  1 / 2  1 / 5
```

Quindi si sommano i numeri contigui, compresi fra due barre inclinate:

```
6 + 2 / 4 + 2 / 1 + 1 / 2 + 1 / 5
```

Da cui:

```
8 / 6 / 2 / 3 / 5
```

Pertanto si ha: **28 745 • 3 = 86 235**

La moltiplicazione (secondo caso)

Vediamo la moltiplicazione: **28 745 • 538**.

Si ottengono le moltiplicazioni parziali di un numero (conviene che sia quello a più cifre) con ogni cifra dell'altro, come abbiamo appena visto.

La riga «a» rappresenta la moltiplicazione parziale di 28 745 • 5

La riga «b» rappresenta la moltiplicazione parziale di 28 745 • 3.

La riga «c» rappresenta la moltiplicazione parziale di 28 745 • 8.

Questi risultati parziali devono essere allineati sfasandole ogni volta di un posto verso destra: righe «a b c».

Si sommano tutte le cifre, che stanno all'interno di ogni spazio delimitato dalle barre inclinate, e si riportano i rispettivi risultati come nella riga «d»; da destra andando verso sinistra: (0 = 0), (5 + 2 + 4 = 11), (5 + 2 + 1 + 6 + 3 = 17), . . . e così di seguito.

```
a      1 / 0  4 / 0  3 / 5  2 / 0  2 / 5
b              0 / 6  2 / 4  2 / 1  1 / 2  1 / 5
c                     1 / 6  6 / 4  5 / 6  3 / 2  4 / 0
d   1 /   4  /  12  /  25  /  13  /  17  /  11  /  0
e   1     5     4      6      4      8      1      0
```

Si esegue infine la ***propagazione del riporto***.

Considero lo zero «0» della riga «d» e lo scrivo nella riga «e».

Considero l'«11» della riga «d»; scrivo l'«1» delle unità nella riga «e» e l'«1» delle decine lo riporto e lo sommo al risultato presente alla sinistra: 1 + 17 = 18.

Considero il «18» (1 + 17) della riga «d»; scrivo l'«8» nella riga «e» e riporto l'«1» sommandolo al risultato presente alla sinistra: 1 + 13 = 14, . . . e così di seguito.

Nella riga «e» compaiono le cifre del risultato.

Pertanto si ha: **28 745 • 538 = 15 464 810**

La radice quadrata con gli Ossi di Napier

Con l'aggiunta di un'ulteriore ***tavoletta delle radici quadrate*** (indicata con la lettera «**A**» in [fig. 07]), gli ***Ossi di Napier*** possono essere utilizzati per estrarre la ***radice quadrata*** di un numero.

Estraiamo la radice quadrata di: **71 289**.

Dividiamo il numero in gruppi di due cifre a partire da destra (la stessa operazione che abbiamo compiuto in [**L'estrazione della radice quadrata con carta e penna**]); avremo pertanto: 7.12.89 [fig. 08].

A

√		
0/2	2	1
0/4	4	2
0/9	6	3
0/6	8	4
2/5	10	5
3/6	12	6
4/9	14	7
6/4	16	8
8/1	18	9

```
    0000
   36
 3
 7.12.89
 2  6  7
 4
  276
    3689
```

B

4	√		
/4	0/1	2	1
/8	0/4	4	2
1/2	0/9	6	3
1/6	1/6	8	4
2/0	2/5	10	5
2/4	3/6	12	6
2/8	4/9	14	7
3/2	6/4	16	8
3/6	8/1	18	9

C

5	2	√		
/5	/2	0/2	2	1
1/0	/4	0/4	4	2
1/5	/6	0/9	6	3
2/0	/8	0/6	8	4
2/5	1/0	2/5	10	5
3/0	1/2	3/6	12	6
3/5	1/4	4/9	14	7
4/0	1/6	6/4	16	8
4/5	1/8	8/1	18	9

[fig. 08]

```
 7.12.89
```

scriviamo il numero, diviso in gruppi, e consideriamo quello più a destra composto in questo caso da una sola cifra; il «7».

Cerchiamo, nella prima colonna della tavoletta «**A**» (quella suddivisa con le diagonali), il numero maggiore che sia minore od uguale alla prima coppia di cifre; nel nostro caso il «7».

```
 3
 7.12.89
 2
 4
```

questo numero è il «4»: nella medesima riga (evidenziata in colore), e nella colonna più a destra, si legge la prima cifra del risultato «2», che andiamo a scrivere sotto il «7»; sotto il «2» scriviamo il «4», che è il numero cercato, quello trovato nella prima colonna della tavoletta «**A**».

La differenza «3», fra il numero del primo gruppo (nel nostro caso il «7») e Il «4», andiamo a scriverla sopra il «7».

All'epoca di **Nepero**, questo tipo di sottrazione alla rovescia era uno dei metodi più diffusi.

Per passare alla seconda fase dobbiamo prendere in esame il numero «4» che si trova nella colonna centrale in corrispondenza della riga del «2», quella evidenziata, nella tavoletta «A»; prendiamo pertanto la tavoletta con numero progressivo «4» e poniamola davanti alla *tavoletta delle radici quadrate* «A»: la disposizione è rappresentata nello schema in «**B**».

Si considera ora il numero «312»; il «3», ottenuto per differenza fra «7», la cifra del primo gruppo, e «4», il numero cercato nella prima colonna, al quale si è accodato il «12», numero del secondo gruppo di cifre.

```
  36
3
7.12.87
2  6
4
  276
```

la radice che maggiormente approssima il numero «312», rimanendone inferiore o uguale, è il «276»: schema «**B**».

nell' ultima colonna, in corrispondenza della riga in cui si legge il numero «276» (riga evidenziata in colore), si legge il numero «6», che è la seconda cifra del risultato, è lo si scrive a fianco del «2», alla sua destra.

Il numero «276» lo si scrive in basso, mentre la differenza «36», fra «312» e «276», la si scrive in alto.

Per passare alla terza fase dobbiamo prendere in considerazione il «12», che si trova nella colonna centrale in corrispondenza della riga del «6», quella evidenziata, nella *tavoletta delle radici quadrate*.

Per conoscere quali tavolette dobbiamo utilizzare ora, davanti a quella della *radici quadrate*, facciamo un piccolo conto: per adesso vi era la numero «4»; il «4» lo moltiplichiamo per «10» (da unità lo trasformiamo in decine) e otteniamo «40», vi aggiungiamo il «12» e otteniamo «52».

Davanti alla tavoletta delle radici quadrate, adesso dobbiamo disporre la tavoletta con numero progressivo «5» e quella con numero progressivo «2»; schema «**C**».

Si considera ora il numero «3687»; il «36», ottenuto per differenza fra «312» e «276», al quale si è accodato l'«87», numero del terzo gruppo di cifre.

```
  0000
  36
3
7.12.87
2  6  7
4
  276
    3687
```

la radice che maggiormente approssima il numero «3687», rimanendone inferiore o uguale, è proprio il «3687»: schema «**C**».

nell' ultima colonna, in corrispondenza della riga in cui si legge il numero «3687» (riga evidenziata in colore), si legge il numero «7», che è la terza cifra del risultato, è lo si scrive a fianco del «6», alla sua destra.

Il numero «3687», lo si scrive in basso, mentre la differenza «0000», fra «3687», numero cercato e trovato nella riga del «7», evidenziata in colore.

La differenza *nulla* termina l'operazione che ha come risultato «267» ed indica, contemporaneamente che il risultato è un numero esatto: il numero «71287» è il quadrato del numero «267».

Nel caso il risultato non fosse stato esatto, avremmo continuato a ripetere queste fasi tante volte quante fosse stato necessario per ottenere il numero desiderato di cifre significative, accodando ogni volta, al numero iniziale, una coppia di zeri.

Esistevano anche **tavolette per le radici cubiche** che si utilizzavano in pratica, seguendo lo stesso principio, ma qui, il procedimento, non è presentato.

Un terzo metodo per moltiplicare

Con questo metodo si scrivono i due numeri da moltiplicare: «a» e «b», in due differenti colonne; la 1° e la 2°.

1°	2°
45*	15*
22	30
11*	60*
5*	120*
2	240
1*	480*

Vogliamo moltiplicare il numero «a = 45» col numero «b = 15».

Scriviamo il numero «45» nella prima colonna «1°» ed il numero «15», nella seconda colonna «2°».

Si divide per due («2») il numero scritto nella colonna «1°» e il risultato lo si scrive sotto, sempre nella «1°» colonna.

In questa fase, si ignora la parte decimale: 45 / 2 = 22.5; il «0.5» è ignorato è sotto il «45» si scrive semplicemente «22».

Si va avanti così, fino a quando non si arriva all'uno «1»; a questo punto ci si ferma.

Adesso si moltiplica per due («2») il numero «15» scritto nella colonna «2°» e il risultato lo si scrive, sempre nella colonna «2°», fino ad arrivare alla linea in cui si è giunti all'«1», nella colonna «1°»; nell'ultima fila troviamo, pertanto, l'«1» nella colonna «1°» e il «480» nella colonna «2°».

Il risultato della moltiplicazione, fra «a = 45» e «b = 15», lo si ottiene sommando tutti i numeri della colonna «2°» il cui numero corrispondente, nella colonna «1°», è dispari.

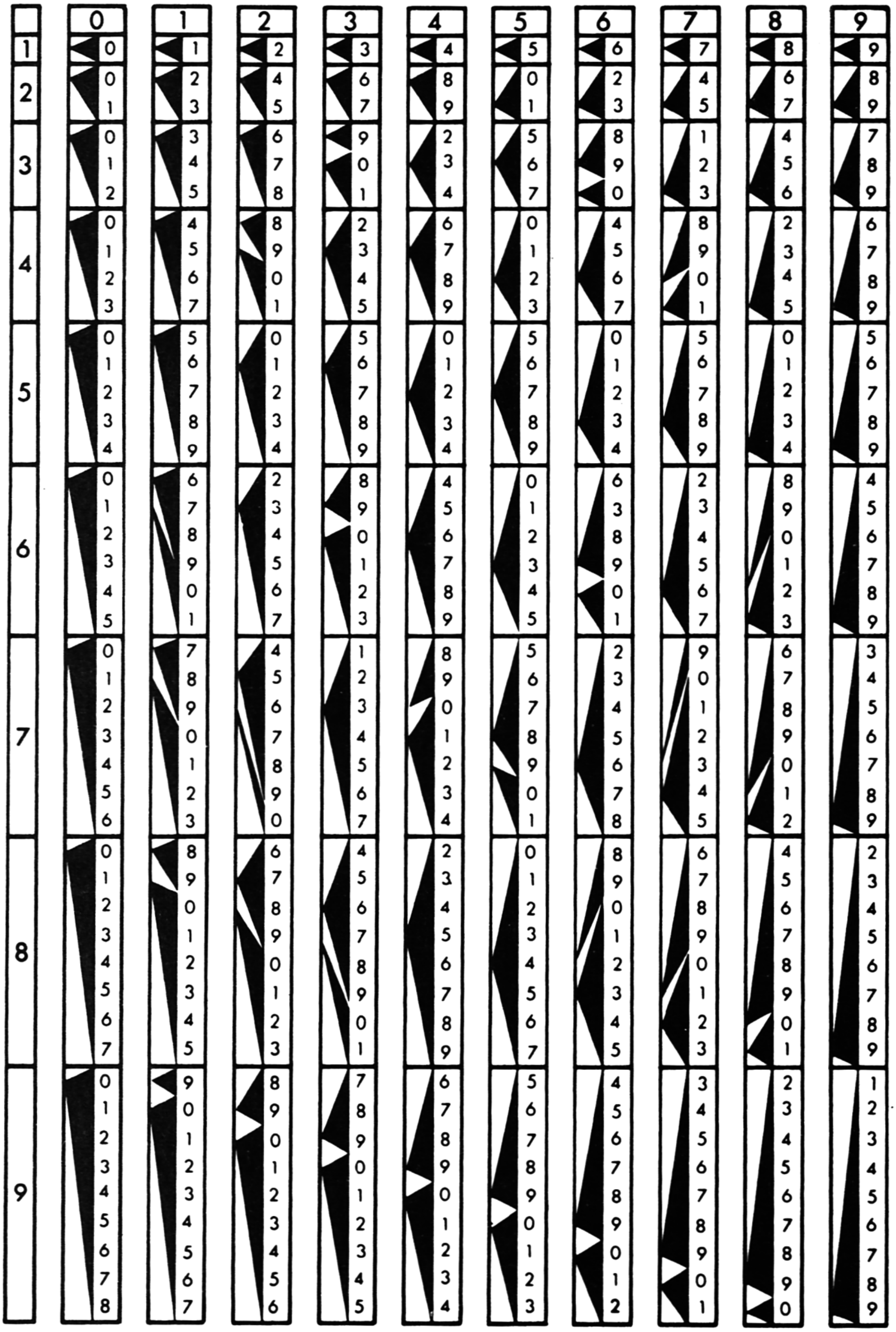
Nella colonna «1°», gli asterischi indicano i numeri dispari; nella colonna «2°» gli asterischi indicano i numeri che devono essere sommati per ottenere il risultato cercato.

Il risultato del prodotto «45 • 15» è uguale a: «480 + 120 + 60 + 15 = 675».

Avremo pertanto: **45 • 15 = 675**

I regoli di Genaille-Lucas

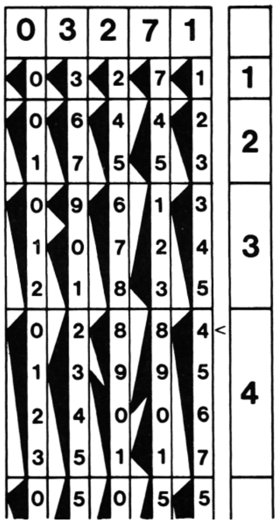
I ***regoli di*** **Genaille-Lucas** sono stati ideati dall'ingegnere francese **Henri Genaille**, questi suoi regoli risolvevano finalmente l'inconveniente, presente nei ***bastoni di*** **Nepier**, determinato dalla necessità di trasportare le cifre da una colonna all'altra, nella lettura dei prodotti parziali [fig. 09].



[fig. 09]

La moltiplicazione

Nei ***regoli di* Genaille-Lucas** vi è un regolo per ogni cifra, dallo *zero* «0» al *nove* «9»; ogni regolo è diviso in nove caselle in ciascuna delle quali vi sono indicate alcune cifre e una o due frecce, rivolte a sinistra, ad indicare, nel regolo accanto, una cifra particolare.



[fig. 10]

In [fig. 10] è stato illustrato come si può ottenere il prodotto della moltiplicazione: 3 271 • 4.

Per prima cosa, devono essere posti uno accanto all'altro i regoli contrassegnati dalle cifre «0 3 2 7 1» (il regolo contrassegnato dalla cifra zero «0» deve sempre essere posto all'inizio, all'estrema sinistra) poi, cominciando dal numero più in alto della quarta casella del regolo posto all'estrema destra, e procedendo verso sinistra, si leggono in successione le cifre indicate dalle frecce.

Nel nostro caso, il regolo posto all'estrema destra è quello contrassegnato con l'uno «1» (ancora più a destra vi è una striscia in cui vi sono indicati i numeri progressivi delle caselle che potrebbe tranquillamente essere trascurata), il numero più in alto della quarta casella, che indica contemporaneamente il numero di casella, è il quattro «4» (indicato sempre in [tab. 10] con una freccetta).

Nel nostro caso leggeremo: 4, 8, 0, 3, 1.

Avremo pertanto: **3 271 • 4 = 13 084**

Nel caso ora volessimo moltiplicare lo stesso numero per due «2»: 3 271 • 2, dovremmo iniziare dal numero più in alto della seconda casella, che è il due «2», e leggeremo in successione il 2, il 4, il 5, il 6, lo 0.

Avremo pertanto: **3 271 • 2 = 6 542** (lo zero iniziale si omette).

Nel caso volessimo moltiplicare lo stesso numero per ventiquattro «24»: 3 271 • 24, dovremmo ricavare prima il prodotto di 3 271 • 4 = 13 084, poi dovremmo ricavare il prodotto di 3 271 • 2 = 6 542 e moltiplicarlo per 10 ottenendo il numero 65 420 (il due «2» occupa la posizione delle decine) ed infine dovremmo sommare i due risultati.

In sintesi:13 084 +
65 420 =
----
78 504

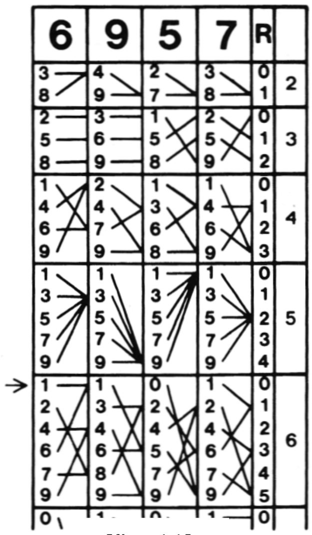
Avremo pertanto: **3 271 • 24 = 78 504**.

I regoli di Genaille-Lucas (atto secondo)

Una volta eliminato l'annoso problema delle cifre da riportare, al **Genaille** fu semplice riuscire a creare dei regoli specifici per le divisioni.

La divisione

Questi regoli sono simili a quelli utilizzati per risolvere le moltiplicazioni, ma in essi o l'una o le due frecce sono sostituite da un notevole numero di freccette.



[fig. 11]

la [fig. 12] illustra la serie completa dei regoli utilizzati per eseguire le divisioni; all'estrema destra, della serie, vi è un regolo particolare, contrassegnato dalla lettera «R», usato per determinare l'eventuale resto della divisione.

I regoli per le divisioni devono essere usati nella direzione contraria rispetto a quella seguita per le moltiplicazioni.

In [fig. 11] è stato illustrato come si può ottenere il quoziente della divisione: 6 957 / 6 = 1 159, col resto di 3.

Per prima cosa, devono essere posti uno accanto all'altro i regoli contrassegnati dalle cifre «6 9 5 7 R» (il regolo, contrassegnato dalla lettera «R», deve sempre essere posto alla fine, all'estrema destra) poi, cominciando dal numero più in alto della sesta casella del regolo posto all'estrema sinistra, e procedendo verso destra, si leggono in successione le cifre indicate dalle frecce.

Nel nostro caso, il regolo posto all'estrema sinistra è quello contrassegnato col sei «6», il numero più in alto della sesta casella, è l'uno «1» (indicato in [tab. 08] con una freccetta).

Nel nostro caso leggeremmo in successione: l'1, l'1, il 5, il 9, e, sul regolo «R», il «3».

Avremo pertanto: **6 957 / 6 = 1 159**, col resto di **3**.

Sapendo che **3** (resto della divisione) / **6** (divisore) = **0.5**, possiamo affermare che:

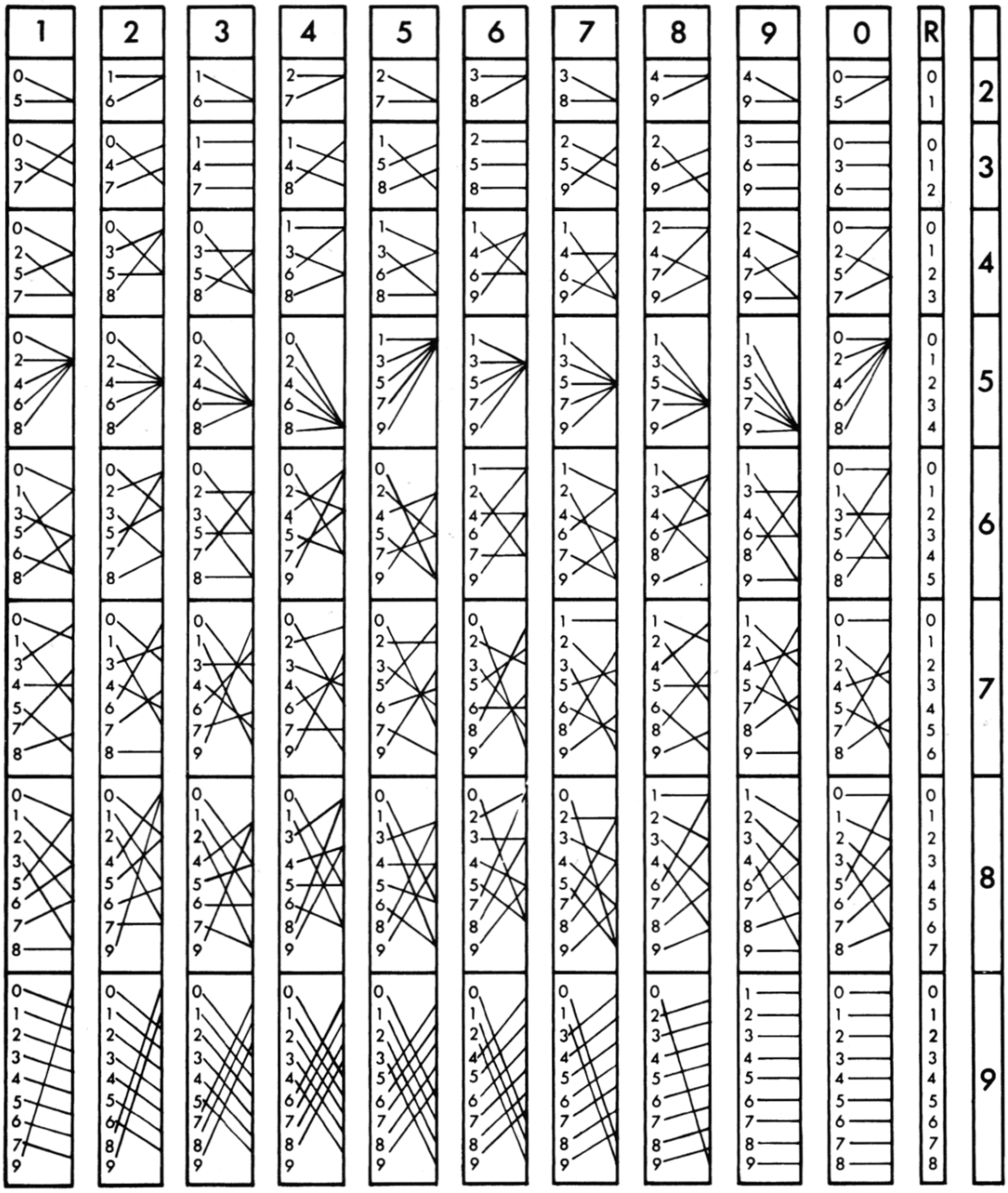
6 957 / 6 = 1 159.5

Nel caso ora volessimo dividere lo stesso numero per quattro «4»: 6 957 / 4, dovremmo iniziare dal numero più in alto della quarta casella, che è ancora l'uno «1», e leggeremo in successione l'1, il 7, il 3, il 9, e, sul regolo «R», l'uno «1».

Avremo pertanto: **6 957 / 4 = 1 739**, col resto di **1**.

Sapendo che 1 (resto della divisione) / 4 (divisore) = 0.25, possiamo affermare che:

6 957 / 4 = 1 739.25



[fig. 12]

La divisione di un numero «n» per un numero «d»: x = n / d, essendo il dividendo «d» un numero a due o più cifre (ad esempio d = 46), si presenta subito molto complessa.

Vi sono, invero, delle situazioni in cui si possono semplificare i calcoli, ma sono situazioni molto particolari, da analizzare di volta in volta.

Un esempio per tutti potrebbe essere la divisione: 3 509 625 / 105.

Scomponendo «105» in fattori primi, si ha: 3, 5, 7.

È sufficiente, pertanto, dividere 3 509 625 per 3, ottenendo: 1 169 875.

Dividere il risultato 1 169 875 per 5, ottenendo: 233 975.

Dividere ancora il risultato 233 975 per 7, ottenendo: 33 425.

Infatti: **3 509 625 / 105 = 33 425**

Una moltiplicazione *molto poco* usata

Il precedente modo di operare, può essere usato anche per moltiplicare numeri scritti nella notazione romana antica (prima del metodo sottrattivo).

1°	2°
LXXVIII (78)	XVIIII (19)
XXXVIIII* (39)	XXXVIII* (38)
XVIIII* (19)	LXXVI* (76)
VIIII* (9)	CLII* (152)
IIII (4)	CCCIIII (304)
II (2)	DCVIII (608)
I* (1)	MCCXVI* (1216)

Ammettiamo di voler moltiplicare fra loro i numeri «a_R = **LXXVIII**» e «b_R = **XIX**» che corrispondono ai nostri *numeri decimali* «a = 78» e «b = 19».

Trasformiamoli in *numeri romani antichi*, senza il sistema sottrattivo: «a_{RA} = **LXXVIII**» e «b_{RA} = **XVIIII**».

Il risultato della moltiplicazione, come ormai sappiamo, è dato dalla somma dei numeri, della colonna «2°», che corrispondono ai numeri dispari, nella colonna «1°».

Eseguiamo la somma, addizionando pedissequamente tutti i simboli (iniziando da quelli di valore inferiore e segnandoli da destra a sinistra sotto gli addendi); otteniamo pertanto sette «I», tre «V», sei «X», due «L», tre «C», una «M»:

```
            XXXVIII +
              LXXVI +
               CLII +
             MCCXVI =
---------------------
MCCCLLXXXXXXVVVIIIIIII
```

Da cui, essendo: «IIIIIII = VII», «VVV**VII** = XXII», «XXXXXX**XXII** = LXXXII», «LL**LXXXII** = CLXXXII», «CCC**CLXXXII** = CDLXXXII», si ha, come risultato: MCDLXXXII (1482).

Avremo pertanto: **LXXVIII + XIX = MCDLXXII**.

Un primo metodo per sottrarre (ancora meno usato)

Abbiamo visto come si può eseguire la moltiplicazione, fra due numeri, utilizzando il sistema numerico romano e, nel contempo, anche come poter eseguire la somma; la differenza è ugualmente fattibile, anche se più lunga e complessa.

Ammettiamo, tanto per fare un esempio, di voler trovare la differenza fra i due numeri romani: a_R = **MDCCLXVII** (1767), b_R = **CDXXVIII** (428).

Convertiamo il «b_R» in un numero romano antico: CDXXVIII → **CCCCXXVIII**.

Per eseguire l'operazione sottraiamo fra loro i simboli uguali.

Da «II» non possiamo sottrarre «III» (nel *sottraendo* vi sono tre «I», mentre nel *minuendo* vi sono due «I»); ne possiamo tranquillamente elidere due, ma il terzo «I», non potendolo eliminare, lo scriviamo sotto quello che sarà il risultato parziale (segnato in neretto).

I «V» si elidono a vicenda.

Da «X» non possiamo sottrarre «XX»; ne possiamo elidere uno e l'altro lo scriviamo a fianco (a sinistra) di «I», il primo simbolo non eliminato.

Il (simbolo) «L» è presente solo nel *minuendo* e pertanto lo segniamo come parte del risultato parziale.

Da «CC» non possiamo sottrarre «CCCC»; ne possiamo eliderne due e gli altri due li scriviamo a sinistra dell'«X» non eliminato.

Il «D» è presente solo nel *minuendo* e pertanto lo segniamo come parte del risultato parziale.

Il «M» è presente solo nel *minuendo* e pertanto lo segniamo come parte del risultato parziale.

```
  MDCCLXVII -      sottraendo
CCCCXXVIII =       minuendo
-----------
        MDL
       ----
       CCXI
```

Eseguiamo ancora qualche operazione:

MDL - I	(L – I = XXXXVIIII)	= MDXXXXVIIII	
MDXXXXVIIII - X		= MDXXXVIIII	
MDXXXVIIII – CC	(D – CC = CCC)	= MCCCXXXVIIII	(risultato)

Convertiamo il numero romano antico «MCCCXXXVIIII», nel nuovo sistema (col metodo sottrattivo), ed otteniamo:

MCCCXXXVIIII → MCCCXXXIX

Avremo pertanto: **MDCCLXVII (1767) - CDXXVIII (428) = MCCCXXXIX (1339)**

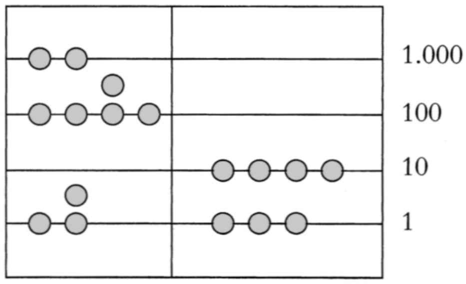
L’abaco

Il termine «àbaco» deriva dal *latino abacus*, tramite la *forma genitiva* ἄβακας (del greco ἄβαξ), che proviene a sua volta dall'*ebraico* חשבונייה, "polvere"; infatti, il termine originario si riferiva ai primi abachi costituiti da una tavoletta di sabbia.

L’abaco romano

I romani *de Roma* (≈ **I** secolo a.C.) preferivano, molto probabilmente, eseguire tutte le operazioni per mezzo di un abaco; la numerazione era utilizzata soltanto per segnare i valori ed indicare il risultato.

Il funzionamento delle tavole di calcolo romane, simili a quelle dei greci, presentava delle linee orizzontali; i pezzi che intersecavano le linee, corrispondevano ad un’unità e quelli situati fra le linee, corrispondevano a cinque unità.

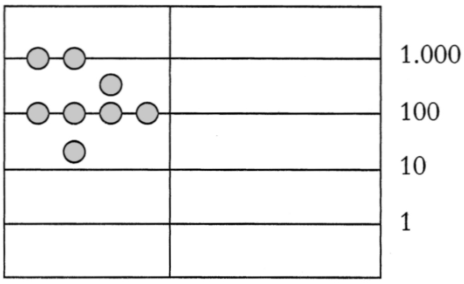


[fig. 13a]

Nel nostro esempio [fig. 13a] la posizione dei pezzi nel riquadro di sinistra rappresenta il numero «2 907», mentre la posizione dei pezzi nel riquadro di destra, rappresenta il numero «43».

Nel riquadro di sinistra abbiamo: due pezzi nella linea delle migliaia «2000», un pezzo fra la linea delle migliaia e quella delle centinaia «500», nessun pezzo sulla linea delle decine «0», quattro pezzi sulla linea delle centinaia «400», un pezzo fra la linea delle centinaia e quella delle decine «5», due pezzi sulla linea delle unità «2».

Per cui sommando: 2000 + 500 + 0 + 400 + 5 + 2 = **2 907**.



[fig. 13b]

Nel riquadro di destra abbiamo: quattro pezzi sulla linea delle decine «40», tre pezzi sulla linea delle unità «3».

Per cui: 40 + 3 = **43**.

Spostando tutti i pezzi dal riquadro di destra in quello di sinistra (sommando il numero rappresentato dai pezzi del riquadro di destra con quello rappresentato dai pezzi del riquadro di sinistra) si ottiene la disposizione dei pezzi che rappresenta il valore del risultato dell’addizione [fig. 13b].

In verità, prima bisogna sostituire gli eccessi: nella linea delle unità risulterebbero 5 pezzi (3 + 2) che diverrebbero un pezzo, fra la linea dell’unità e quella delle decine, il quale, col pezzo già presente, diverrebbe un pezzo delle decine (5 + 5); per ultimo, nella linea delle decine si troverebbero cinque pezzi (1 + 4) che diverrebbero un pezzo fra la linea delle decine e quella delle centinaia.

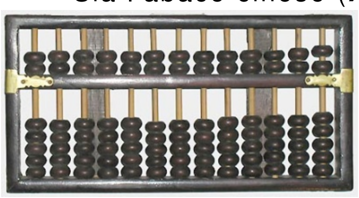
Al termine di tutte le operazioni otterremo la disposizione rappresentata in [fig. 06b].

Adesso, nel riquadro di sinistra avremo: due pezzi nella linea delle migliaia «2000», un pezzo fra la linea delle migliaia e quella delle centinaia «500», quattro pezzi nella linea delle centinaia «400», un pezzo fra la linea delle centinaia e delle decine «50».

Pertanto, il risultato dell’operazione sarà: 2000 + 500 + 400 + 50 = **2 950**.

L’abaco cinese (Suan pan)

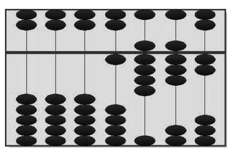
Sia l’abaco cinese (***Abaco***, in cinese tradizionale, si scrive 算盤) sia la tecnica del ***Zhu Suan***, che comprende il calcolo per mezzo di esso, esisteva già nel 13° secolo (durante le dinastie **Song** e **Yuan**) e dopo il 14° secolo (dinastia **Ming**) divenne di uso comune [fig. 14a].


[fig. 14a]

L’abaco cinese è formato da un’intelaiatura rettangolare di legno, divisa in due parti da un’assicella anch’essa di legno; perpendicolari a questa sono allineate 13 bacchette di bambù con infilate 7 palline ciascuna, 2 sopra l’assicella e 5 sotto di essa; ognuna delle palline superiori equivale a 5 e ognuna di quelle inferiori a uno.

Utilizza il sistema posizionale decimale per cui, fissata un’asticella come quella delle unità, l’asticella immediatamente sulla sua sinistra sarà quella delle decine, la successiva, sempre sulla sinistra, quella delle centinaia, e così via.

In [fig. 14b] è rappresentato il numero «1 982»:


[fig. 14b]

Osservazioni

Nella bacchetta più a destra (posizione delle unità) vi sono due palline nella parte inferiore, quindi «**2**» unità.

Nelle bacchetta adiacente sulla sinistra (posizione delle decine) vi è una pallina nella parte superiore e vi sono tre palline nella parte inferiore, quindi «5 + 3 = **8**» decine.

Nella successiva, sempre verso sinistra (posizione delle centinaia) vi è una pallina nella parte superiore e vi sono quattro palline nella parte inferiore, quindi «5 + 4 = **9**» centinaia.

Nella successiva, sempre verso sinistra, (posizione delle migliaia) vi è una pallina nella parte inferiore, quindi «**1**» migliaio.

Le somme e le sottrazioni erano eseguite semplicemente aggiungendo o togliendo gettoni.

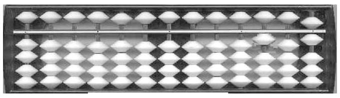
Le moltiplicazioni erano eseguite come somme ripetute:

Per moltiplicare «127» per «35» si sommava «1 270» per tre volte e poi si sommava «127» per cinque volte.

Le divisioni si eseguivano tramite *spicciolature* successive e suddivisione in mucchietti; il procedimento, lungo e laborioso, non è qui riportato, ma il lettore curioso troverà il modo per reperirlo.

L'abaco giapponese (Soroban)

L'abaco giapponese (Abaco, in giapponese, si scrive, そろばん) deriva dall'abaco cinese, importato in Giappone intorno al 1600 a.C. [fig. 15]; nella medesima figura è rappresentato il numero **106**.



[fig. 15]

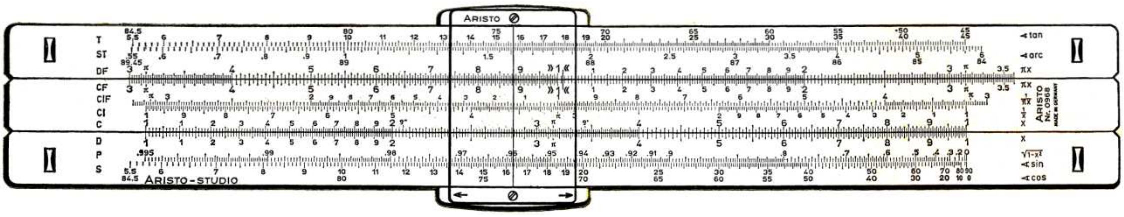
Le uniche differenze, rispetto all'abaco cinese, consistono nel numero delle palline: una sola nella parte superiore, quattro in quella inferiore; il procedimento con cui si eseguono le varie operazioni, resta comunque invariato.

Alla fine degli anni quaranta, in un memorabile *scontro* di prova, fra un contabile giapponese con un ***Soroban*** ed un americano, con una ***calcolatrice***, il giapponese vinse sia in *velocità* sia in *precisione*.

Il regolo calcolatore

Le tabelle logaritmiche sia quelle per i numeri sia quelle per le funzioni trigonometriche, sono molto precise (quelle rappresentate hanno cinque cifre decimali, ma ne sono state pubblicate anche a sette od anche fino ad undici cifre decimali); non necessitando di precisioni molto elevate si può utilizzare il *regolo calcolatore*.

[fig. 16]



Il ***regolo calcolatore*** è basato sullo stesso principio dei logaritmi e serve per eseguire velocemente: moltiplicazioni, divisioni, elevazione a potenza, estrazioni a radice, logaritmi in base «n», funzioni trigonometriche [fig. 16].

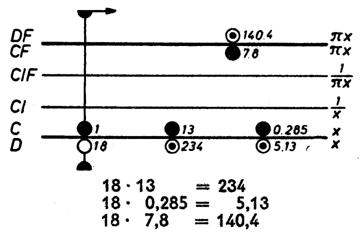
È fondato su un'idea semplice: su di una scala «D» sono riportate lunghezze proporzionali ai logaritmi decimali, a partire dal punto «1» e procedendo per segmenti proporzionali a «log 2», «log 3», . . ., «log 100».

Parimenti, le medesime divisioni sono riportate su di una seconda scala «C» stampata nel corsoio (o *cursore*) il quale può scorrere, per mezzo di due guide, lungo la «D»; le due scale sono identiche sia nella lunghezza sia nelle divisioni per cui, facendo corrispondere al punto iniziale della riga «D» il punto iniziale della riga «C», le marcature delle due linee si sovrappongono perfettamente.

Prodotto

È l'unica operazione che sarà presentata: non si vuole qui spiegare il funzionamento del regolo in tutte le sue possibilità, ma semplicemente fornire un'idea, anche se forse potrà risultare vaga, del modo con cui si opera con questo strumento.

Si ricorda che per eseguire il prodotto di due numeri «b» e «c» (a = b • c), si possono sommare i loro logaritmi avendo: log (b • c) = log b + log c; parimenti, addizionando lunghezze logaritmiche, la loro somma sarà uguale al prodotto dei valori che queste lunghezze rappresentano [fig. 17].



[fig. 17]

Per conoscere il risultato della moltiplicazione: a = b • c, sarà sufficiente, pertanto, far scorrere la scala «C», del corsoio, lungo la scala «D» fino a portare il punto marcato «1» di «C» sopra il punto marcato «b» di «D»; a questo punto sotto il punto marcato «c» di «C» si troverà, sulla scala «D», il punto marcato (b • c), quindi «a».

Nell'esempio di [fig. 17] si è portato l'«1» della scala «C» sul «18» della scala «D»; sotto il valore «13» della scala «C» si legge il valore 234: **18 • 13 = 234**.

Parimenti avviene per le moltiplicazioni: **18 • 0,285 = 513**, **18 • 7,8 = 140**; naturalmente, la posizione della virgola (l'ordine di grandezza) lo deve stabilire l'operatore con un piccolo calcolo mentale, non impossibile.

Per le altre operazioni? Be! È già troppo quello che si è, fin qui, scritto.

Le moltiplicazioni per nove

Ricordarsi la tabellina del nove non è poi così problematico come potrebbe sembrare a qualcuno, ma vi è un sistema praticamente infallibile; è peraltro semplice e immediato.

[fig. 18]

Basta che poniate le vostre mani davanti a voi con il dorso in vista e le dita distese [fig. 18].

Piegate ora, partendo da sinistra, il secondo dito «2» della mano sinistra (l'anulare sinistro) e leggete sulle vostre dita il risultato di «2 • 9».

[fig. 19

Se guardate bene vi accorgerete che: avete piegato il secondo dito il quale rappresenta il «2», vi è un dito alla sinistra di quello che avete piegato e otto dita a destra di quello che avete piegato; in pratica avete visualizzato il risultato di «2 • 9 = **18**» [fig. 19].

[fig. 20]

Provate ora ad eseguire l'operazione «5 • 9»; piegate il pollice sinistro, che rappresenta il «5», e guardatevi le mani; vedrete quattro dita alla sinistra del pollice piegato e cinque dita alla sua destra; Il pollice piegato non si vede bene, ma proprio perché non si vede che potete arguire che è piegato [fig. 20].

In quest'altro caso avete visualizzato il risultato che è di «5 • 9 = **45**».

[fig. 21]

Proviamo un'ultima operazione; piegate il medio della mano destra (l'*ottavo* dito a partire dal mignolo della mano sinistra) [fig. 21].

Ora leggete il risultato; sette dita alla sinistra dell'anulare della mano destra e due dita alla sua destra.

Avete appena visualizzato il risultato dell'operazione «8 • 9 = **72**».

Alcune strane moltiplicazioni

Dando per scontato che la maggior parte delle persone conosca la tavola delle moltiplicazioni fino al «5 • 5», vediamo un metodo semplice, e direi naturale, che consente di eseguire alcune moltiplicazioni che superano questo campo.

È possibile, infatti, eseguire, con l'ausilio delle dita delle proprie mani, delle operazioni che diano, in modo quasi meccanico, il prodotto di una copia qualsiasi di cifre comprese fra il «6» ed il «10».

[fig. 22]

Prendiamo ad esempio il prodotto di «7» per «8» [fig. 22].

Distendiamo due dita della mano sinistra col palmo in vista (il numero delle dita deve rappresentare il numero eccedente il «5»: 7 - 5 = 2); distendiamo tre dita della mano destra: 8 – 5 = 3.

Osserviamo che nella mano sinistra restano tre dita piegate, mentre nella mano destra restano due dita piegate.

Il prodotto finale si ottiene:

Sommando la cifra rappresentata dalle dita distese della mano sinistra con quelle della mano destra e moltiplicando poi il risultato per dieci; questa cifra deve, infatti, far parte delle decine del numero finale; in pratica l'operazione completa diviene: (2 + 3) • 10 = **50**.

Moltiplicando la cifra rappresentata dalle dita piegate della mano sinistra con quelle della mano destra: 3 • 2 = 6, e sommando il risultato a quello precedente (nel nostro caso «50»).

Pertanto il risultato finale è: 50 + 6 = **56**.

È molto più facile a farsi che a dirsi.

Proviamo con il prodotto di «8» per «9» [fig. 23].

Tre dita distese della mano sinistra più quattro dita distese della mano destra fanno sette dita distese, quindi: (3 + 4) • 10 = **70**.

[fig. 23]

Due dita piegate della mano sinistra per un dito piegato della mano destra fanno due dita piegate: **2**.

Pertanto il risultato finale è: 70 + 2 = **72**.

A prima vista, potrebbe sembrare che con «6 • 6» il procedimento fallisca: nella mano sinistra avremmo un dito disteso e quattro dita piegate; parimenti nella mano destra.

Facciamo il calcolo per le dita distese.

Si ha: $(1 + 1) \cdot 10 = 20$ è qui, forse, che qualcosa non torna; è troppo poco!

Facciamo, però, anche il calcolo per le dita piegate.

Si ha: $4 \cdot 4 = 16$.

Da cui: $20 + 16 = 36$ ha funzionato!

Oltre il prodotto fra le cifre da «6» a «10», è possibile eseguire moltiplicazioni anche fra altri gruppi di numeri, ma diverrebbe umanamente impossibile eseguire, con questo metodo, moltiplicazioni fra numeri che sono in gruppi differenti.

Il miglior modo per esprimere queste operazioni (moltiplicazioni) è quello di rappresentarle mediante una formula:

$$\text{risultato del prodotto} = (e_S + e_D) \cdot 10 + (c_S \cdot c_D)$$

In cui: e_S = è il numero di dita distese sulla mano sinistra - e_D = è il numero di dita distese sulla mano destra – c_S = è il numero di dita piegate sulla mano sinistra – c_D = è il numero di dita piegate sulla mano destra.

In generale si può estendere, il medesimo sistema, ad altri gruppi di cifre seguendo il procedimento seguente [tab. 02]:

serie di numeri da moltiplicare	formula risolutiva
6 ÷ 10	$\mathbf{(e_S + e_D) \cdot 10 + (c_S \cdot c_D)}$
11 ÷ 15	$(e_S + e_D) \cdot 10 + (c_S \cdot c_D) + 100$
16 ÷ 20	$(e_S + e_D) \cdot 20 + (c_S \cdot c_D) + 200$
21 ÷ 25	$(e_S + e_D) \cdot 20 + (c_S \cdot c_D) + 400$
26 ÷ 30	$(e_S + e_D) \cdot 30 + (c_S \cdot c_D) + 600$

[tab. 02]

Quando per andare da CAGLIARI a PIRRI si passa per SASSARI

Esiste un metodo molto particolare, per eseguire le moltiplicazioni, che non si dovrebbe mai né suggerire né tantomeno consigliare a qualcuno, ma che potrebbe essere simpatico conoscere; iniziamo confondendo maggiormente le idee.

Ammettiamo di voler ricavare il prodotto: «a = 93» per «b = 89».

Troviamo il complemento a cento di 93: $x = 100 - 93 = 7$.

Troviamo il risultato di 89 – x: $z = 89 - 7 = 82$.

Scriviamo questo numero su un foglio: **82**.

Troviamo il complemento a cento di 89: $y = 100 - 89 = 11$.

Moltiplichiamo x con y: $w = 7 \cdot 11 = 77$.

Scriviamo w in coda all'82: 82**77**.

Adesso prendiamo una calcolatrice ed eseguiamo il prodotto fra 93 e 89; il risultato, forse non inaspettatamente, sarà: $93 \cdot 89 =$ **8 277**.

In effetti, si può ricavare una formula risolutiva, per ricavare il prodotto fra due numeri: «a», «b», in funzione solo dei *complementi a cento* dei rispettivi fattori.

Possiamo scrivere, infatti:

$$(100 - y - x) \cdot 100 + x \cdot y$$

Ammettiamo di voler conoscere il prodotto: «a = 21» per «b = 35».

Troviamo i due complementi: «x = 100 – 21 = 79», «y = 100 – 35 = 65».

Risolviamo l'equazione:

$$(100 - 65 - 79) \cdot 100 + 79 \cdot 65 = -4\,400 + 5\,135 = \mathbf{735}$$

Provate a verificare il risultato utilizzando una calcolatrice, ma non prendetevela a vizio.

Criteri di divisibilità

Un numero è divisibile per:

«**2**» - se l'ultima cifra del dividendo (quella delle unità) è o pari o uno zero «0».

«**3**» - se lo è la somma delle singole cifre del dividendo (continuando a sommare le cifre del risultato fino a rimanere con una sola cifra).

«**4**» - se le ultime due cifre del dividendo sono o entrambe zero «00» o quando sono divisibili per quattro «4» le sue ultime due cifre.

«**5**» - se l'ultima cifra del dividendo è o un cinque «5» o uno zero «0».

«**6**» - se il dividendo è contemporaneamente divisibile sia per due «2» sia per tre «3».

«**8**» - quando le ultime tre cifre del dividendo sono o tutte zero «000» o quando sono divisibili per otto «8» le sue ultime tre cifre.

«**9**» - se lo è la somma delle singole cifre del dividendo (continuando a sommare le cifre del risultato fino a rimanere con una sola cifra).

«**10**» - se l'ultima cifra del dividendo è zero «0».

«**11**» - se la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari, del dividendo, e la somma delle cifre di posto pari o è undici «11» o è un multiplo di undici «11» o è zero «0» (es. 8569 [+ 6 – 9 .+ 5 – 2 = 0] è divisibile per 11).

Qualche curiosità su alcune moltiplicazioni

Moltiplicazione per cinque (5)

Moltiplicare un numero per 5, è come dividerlo per 2 e poi moltiplicarlo per 10.

Per esempio:

$32 \cdot 5 = \frac{32}{2} \cdot 10 = 16 \cdot 10 = 160$

Moltiplicazione per venticinque (25)

Moltiplicare un numero per 25, è come dividerlo per 4 (o dividerlo due volte per 2) e moltiplicarlo poi per 100.

Per esempio:

$84 \cdot 25 = \frac{84}{4} \cdot 100 = 21 \cdot 100 = 2\ 100$

Moltiplicazione per centoventicinque (125)

Moltiplicare un numero per 125, è come dividerlo per 8 (o dividerlo tre volte per 2) e moltiplicarlo poi per 1000.

Per esempio:

$288 \cdot 125 = \frac{288}{8} \cdot 1\ 000 = 36 \cdot 1000 = 36\ 000$

Moltiplicazione per nove (9) o per novantanove (99)

Per moltiplicare un numero per 9 è sufficiente moltiplicare il numero per 10 e poi sottrarre lo stesso numero al risultato; significa, pertanto, moltiplicarlo per (10 – 1).

Per esempio, moltiplichiamo 24 per 9:

Da quanto detto si ha che 24 • 9 = 24 • (10 – 1) = 240 – 24 = 216.

Lo stesso ragionamento può essere applicato per moltiplicare un numero per 99; moltiplicare un numero per 99, significa moltiplicarlo per (100 – 1).

Per esempio, moltiplichiamo 56 per 99:

Da quanto detto si ha che 56 • 99 = 56 • (100 – 1) = 5 600 - 56 = 5 544.

Quindi 999 è uguale a (1000 -1) e 9999 è uguale a (10 000 – 1); chiaro il concetto.

Moltiplicazione per undici (11)

Per moltiplicare un numero di tre cifre per 11 si può procedere come segue:

- partendo da destra verso sinistra si scrive la 1° cifra del numero
- procedendo verso sinistra, si scrive la somma della 1° e 2° cifra
- procedendo verso sinistra si scrive la somma della 2° e 3° cifra
- si scrive infine 3° cifra

Per esempio, moltiplichiamo 435 per 11:

- scriviamo la 1° cifra del numero, che è il [5]
- scriviamo la somma della 1° e 2° cifra, ottenendo [5 + 3] = [8]
- scriviamo la somma della 2° e 3° cifra, ottenendo [3 + 4] = [7]
- scriviamo la 3° cifra, ottenendo [4]

Per cui, da destra verso sinistra, avremo: [4] [7] [8] [5]; vale a dire 435 • 11 = 4 785.

Abbiamo parlato di un numero a tre cifre pensando di usare l'esempio più semplice, naturalmente se il numero da moltiplicare per undici è composto da più di tre cifre è sufficiente seguire la stessa logica.

Per esempio, moltiplichiamo 34 152 per 11.

Avremo: [3] [4 + 3] [1 + 4] [5 + 1] [2 + 5] [2]; vale a dire 34 152 • 11 = 375 672.

Nel caso la somma di due cifre, in parentesi quadra, superi il dieci, si procede nel seguente modo.

Per esempio, moltiplichiamo 875 per 11.
Sappiamo già come procedere e otteniamo facilmente: [8] [7 + 8] [5 + 7] [5].

- 5 + 7 = 12, per cui scriviamo [2] [5] e riportiamo 1
- 7 + 8 = 15; 15 + 1 (che abbiamo riportato) = 16, per cui scriviamo [6] [2] [5] e riportiamo ancora 1
- 8 + 1 (che abbiamo riportato) = 9, per cui scriviamo [9] [6] [2] [5]

Pertanto avremo 875 • 11 = 9 625

Moltiplicazione per potenze di due (2^n)

Per moltiplicare un numero per una potenza di 2 è sufficiente raddoppiare il numero tante volte quante ne indica l'esponente della potenza di 2.
Ricordando (se ne è già parlato) che:
$1 = 2^0$ $2 = 2^1$ $4 = 2^2$ $8 = 2^3$ $16 = 2^4$ $32 = 2^5$
$64 = 2^6$ $128 = 2^7$ ...

Per esempio, vogliamo moltiplicate 12 per 16.
16 è uguale a 2^4 per cui dovremo raddoppiare 12 quattro volte (4 è l'esponente della potenza di 2).
Pertanto si avrà:
12 • 2 = 24
24 • 2 = 48
48 • 2 = 96
96 • 2 = 192 12 • 16 = 192

Qualche curiosità su alcune divisioni

Divisione per cinque (5)

Dividere un numero per 5, è come moltiplicarlo per 2 e poi dividerlo per 10.

Per esempio:
$\frac{85}{5} = \frac{85 \bullet 2}{10} = \frac{170}{10} = 17$

Divisione per venticinque (25)

Dividere un numero per 25, è come moltiplicarlo per 4 (o moltiplicarlo due volte per 2) e dividerlo poi per 100.

Per esempio:
$\frac{62}{25} = \frac{62 \bullet 4}{100} = \frac{248}{100} = 2{,}48$

Divisione per centoventicinque (125)

Dividere un numero per 125, è come moltiplicarlo per (o moltiplicarlo tre volte per 2) 8 e dividerlo poi per 1000.

Per esempio:
$\frac{1\,362}{125} = \frac{1\,362 \bullet 8}{1\,000} = \frac{10\,896}{1\,000} = 10{,}869$

Divisione per potenze di due (2^n)

Per dividere un numero per una potenza di 2 è sufficiente dimezzare il numero tante volte quante ne indica l'esponente della potenza di 2.
Ricordando (se ne è già parlato) che:
$1 = 2^0$ $2 = 2^1$ $4 = 2^2$ $8 = 2^3$ $16 = 2^4$ $32 = 2^5$
$64 = 2^6$ $128 = 2^7$ ...

Per esempio, vogliamo dividere 384 per 16.
16 è uguale a 2^4 per cui dovremo dimezzare 12 quattro volte (4 è l'esponente della potenza di 2).
Pertanto si avrà:
$\frac{384}{2} = 192$
$\frac{192}{2} = 96$
$\frac{96}{2} = 48$
$\frac{48}{2} = 24$ 384 / 16 = 24

Qualche curiosità su alcune elevazioni al quadrato

Il quadrato di un numero a due cifre terminante per cinque (5).

Il risultato è il numero formato dal prodotto della prima cifra, partendo da sinistra, per la stessa cifra più uno ed il quadrato di 5.

Per esempio:
$75^2 = [7 \cdot (7 + 1)] [5^2] = [7 \cdot 8] [25] = [56] [25] = 5\,625$
$95^2 = [9 \cdot 10] [5^2] = [90] [25] = 9\,025$

Un altro modo per eseguire la radice quadrata

Se «n» è il numero del quale vuolsi trovare la radice quadrata, si trovano prima i suoi fattori e poi si ricavano due numeri «a_0» e «b_0» moltiplicandoli in modo qualunque, ma prendendoli una sola volta.

Si calcola infine sia la loro media aritmetica «r_0» sia la loro media armonica «s_0»; a questo punto «r_0» diventerà «a_1» e «s_0» diventerà «b_1» e si calcoleranno le medie «r1» e «s1» di «a1» e «b1», e via cosi, fino a quando i risultati non coincidano per un numero di cifre significative pari alla precisione che desideriamo raggiungere.

la media aritmetica è: $r_j = \frac{a_j + b_j}{b_j}$ la media armonica è: $s_j = \frac{2 \cdot a_j \cdot b_j}{a_j + b_j}$

Calcoliamo, come esempio, la radice quadrata, con cinque decimali, di: 126 ($\sqrt{126}$).

Eseguiamo la fattorizzazione di 126: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$.
Prendiamo: $a_0 = 2 \cdot 3 = 6$, $b_0 = 3 \cdot 7 = 21$.

Eseguiamo i calcoli:

$$r_1 = \frac{6+21}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}500\,00 \qquad a_1 = 13{,}500\,00$$
$$s_1 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 21}{6+21} = \frac{252}{27} = 9{,}333\,33 \qquad b_1 = 9{,}333\,33$$

$$r_2 = \frac{13{,}500\,00 + 9.333\,33}{2} = \frac{22{,}833\,33}{2} = 11.416\,66 \qquad a_2 = 11{,}416\,66$$
$$s_2 = \frac{2 \cdot 13{,}500\,00 \cdot 9.333\,33}{2} = \frac{251{,}999\,91}{22{,}833\,33} = 911{,}036\,4 \qquad b_2 = 11{,}036\,49$$

$$r_3 = \frac{11.416\,66 + 11{,}036\,49}{2} = \frac{22{,}453\,15}{2} = 11{,}226\,58 \qquad a_3 = 11{,}226\,58$$
$$s_3 = \frac{2 \cdot 11{,}416\,66 \cdot 11{,}03\,649}{11{,}416\,66 + 11{,}036\,49} = \frac{251{,}999\,70}{22{,}453\,15} = 11{,}223\,36 \qquad b_3 = 11{,}223\,36$$

$$r_4 = \frac{11{,}226\,58 + 11{,}223\,36}{2} = \frac{22{,}449\,94}{2} = 11{,}224\,97$$
$$s_4 = \frac{2 \cdot 11{,}226\,58 \cdot 11{,}223\,36}{11{,}226\,58 + 11{,}223\,36} = \frac{251{,}999\,90}{22{,}449\,94} = 11{,}224\,97$$

Una calcolatrice scientifica fornisce come risultato: $\sqrt{126}$ = **11,224 972 16**.

Questo metodo ha il vantaggio di dare dei numeri molto approssimati in poche iterazioni, per contro non si può conoscere, con esattezza se il numero dato è un quadrato esatto, poiché la serie dei numeri «r» e «s» non termina mai; l'applicazione del metodo diviene inoltre difficile se il numero, di cui si vuole conoscere la radice quadrata, contiene molte cifre.

Nel caso «n» fosse un numero primo, si devono prendere «$a_0 = n$» e «$b_0 = 1$».

Un calcolo impossibile da fare a mente . . . o quasi

Cerchiamo di risolvere a mente, anche impiegando un poco di tempo (non molto) per pensarci un poco, la radice quinta di «1 350 125 107» (un miliardo trecentocinquanta milioni centoventicinque mila centosette).

$$\xi = \sqrt[5]{1\,350\,125\,107}$$

Sembra impossibile anche sapendo che il risultato è un ***numero esatto***, eppure proviamo a ragionarci su:

♦ Il numero è composto da dieci cifre e, pertanto, se lo dividiamo in gruppi di cinque cifre (poiché parliamo di una radice quinta) a partire dalle unità (da destra), otteniamo due gruppi; il *risultato finale* sarà sicuramente composto da due cifre.
♦ La cifra delle unità, del *risultato finale*, è il «7».

Dovremmo sapere, infatti, che elevando un numero intero alla potenza di cinque, la cifra delle unità non cambia; ciò, ovviamente, e valido anche per il contrario: estraendo la radice quinta dello stesso numero, la cifra delle unità non cambia.

Osservazioni
È una regola generale che elevando un ***numero intero*** alla potenza di: «5», «9», «13», «17», «. . .», la cifra delle unità non cambi.

È ovvio, che è parimenti vero anche il contrario: estraendo una delle medesime radici di un radicando, che fornisca un numero intero, la cifra delle unità non cambia.

Cerchiamo ora di stimare fra quali numeri, denotanti le sole decine, debba collocarsi il numero in esame.

Procediamo per tentativi: «40^5» è uguale a «102 400 000», quindi un numero più piccolo del nostro; il risultato della radice è maggiore di «40».

Osservazioni

È da notare che per ottenere «40^5» è sufficiente calcolare il risultato di «4^5» ed aggiungerci poi cinque zeri in coda.

Anche «60^5», uguale a «777 600 000» (6^5 = 7 776 cui si accodano cinque zeri), è inferiore al nostro numero; il risultato della radice è maggiore di «60».

Proviamo con «70^5» (7^5 = 16 807) ed otteniamo «1 680 700 000», maggiore del nostro numero; il risultato della radice è minore di «70».

La radice quinta di «1 350 125 107» è pertanto un numero compreso fra «60» e «70», ma considerando che la cifra delle unità è il «7», possiamo affermare che il risultato deve essere il numero «**67**».

Osservazioni

Nel calcolo di «X^5», si può ricorrere a semplificazioni come ad esempio, per calcolare mentalmente «6^5», si può procedere come segue: «6 • 6 = 36», «40 • 6 = 240», «240 • 6 = 1400», ed infine «1400 • 6 = 8000», ed il ragionamento resta valido.

Oltre ogni limite

Adesso armiamoci e di carta e di penna perché vogliamo strafare; cerchiamo di trovare la radice tredicesima del numero «8 871 870 642 308 873 326 043 363» (otto quadrilioni ottocentosettantuno triliardi ottocentosettanta trilioni seicentoquarantadue biliardi trecentootto bilioni ottocentosettantatre miliardi trecentoventisei milioni quarantatré mila trecentosessantatre), di cui sappiamo che il risultato è un ***numero esatto***.

$$\xi = \sqrt[13]{8\,871\,870\,642\,308\,873\,326\,043\,363}$$

Osservazioni

I termini come: *bilione*, *biliardo*, *trilione*, *triliardo*, *quadrilione, quadriliardo*, . . . e via a seguire, si prestano ad equivoci poiché tuttora non esiste una normativa internazionale riguardo il loro valore; vedi oltre [**Le scale dei nomi numerici**].

Senza ripeterci, perché ormai sappiamo come procedere, troveremo:

Il numero è composto da venticinque cifre e, pertanto, se lo dividiamo in gruppi di tredici cifre, otteniamo due gruppi; il *risultato finale* sarà sicuramente composto da due cifre.

«70^{13}» (7^{13} + tredici zeri accodati) = «968 890 104 070 000 000 000 000» è inferiore al nostro numero; il risultato della radice è maggiore di «70».

«80^{13}» = «5 497 558 138 880 000 000 000 000» è inferiore al nostro numero; il risultato della radice è maggiore di «80».

«90^{13}» = «25 418 658 283 290 000 000 000 000» è, come ci aspettavamo, maggiore del nostro numero; il risultato della radice è minore di «90».

Pertanto il risultato è compreso fra «80» e «90», ma in considerazione che il numero termina col «3», anche il risultato avrà, come cifra delle unità, il «3».

Possiamo pertanto affermare che il risultato deve essere il numero «**83**».

L'avreste mai pensato, di essere così bravi?

Uno strano procedimento per la moltiplicazione

Per eseguire la moltiplicazione di un numero per undici, che abbiamo già incontrato, possiamo utilizzare anche un altro procedimento; ammettiamo di voler trovare il risultato di: 12 746 • 11 = x.

scriviamo la prima cifra:	1
1 + 2 = 3, e lo segniamo di seguito:	13
2 + 7 = 9, e lo segniamo di seguito:	139
7 + 4 = 11, segniamo l'1 ed indichiamo l'uno delle decine sopra il nove come apice:	$13\overset{1}{9}1$
4 + 6 = 10, segniamo lo zero ed indichiamo l'uno delle decine sopra l'uno come apice:	$13\overset{1}{9}\overset{1}{1}0$
terminiamo scrivendo la cifra 6:	$13\overset{1}{9}\overset{1}{1}06$
scriviamo adesso, in un'altra riga, le prime due cifre perché non hanno alcun apice:	13

1 (l'apice) + 9 = 10, segniamo lo zero ed indichiamo L'uno delle decine sopra il 3 come apice: $\overset{1}{1}30$

1 (l'apice) + 1 = 2,e lo segniamo di seguito: $\overset{1}{1}302$

Scriviamo le ultime due cifre perché prive degli apici: $\overset{1}{1}30206$

scriviamo adesso, in un'altra riga, la prima cifra, l'1 perché privo di apice, la somma di 1 (l'apice) + 3 = 4, le ultime tre cifre perché prive di apice: 140206

Si ha, infatti, che: 12 746 • 11 = **140 206**

Le scale dei nomi numerici

In Italia:

il ***bilione*** equivale ad un *milione* di *milioni* (10^{12} = 1 000 000 000 000).
Il ***trilione*** equivale a un *milione* di *bilioni* (10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000).
Il ***biliardo*** equivale a *mille bilioni* (10^{15} = 1 000 000 000 000 000).
Il ***triliardo*** equivale a *mille trilioni* (10^{21} = 1 000 000 000 000 000 000 000).

Si ha pertanto (in **Italia**): milione = 10^6 ($2^6 \cdot 5^6$ – mega «M»), miliardo = 10^9 ($2^9 \cdot 5^9$ - giga «G»), bilione = 10^{12} ($2^{12} \cdot 5^{12}$ – tera «T»), biliardo = 10^{15} ($2^{15} \cdot 5^{15}$ – astra «A»), trilione = 10^{18} ($2^{18} \cdot 5^{18}$ – nebu «N»), triliardo = 10^{21} ($2^{21} \cdot 5^{21}$ – zete «Z»), quadrilione = 10^{24} ($2^{24} \cdot 5^{24}$ – yotta «Y»), e via a seguire.

Parimenti si ha sia in Francia (million, milliard, billion, billiard, trillion) sia in Germania (Millionenfach, Milliardenfach, Billionenfach, Billiardenfach, Trillionenfach) sia nella maggior parte degli altri stati.

La nomenclatura italiana segue questo procedimento: il prefisso (*bi-, tri-, quadri-*, ecc.) indica la potenza del milione; sostituendo *-ardo* a *-one* si moltiplica per mille (10^3), perciò il bilione è $(10^6)^2 = 10^{12}$, il biliardo è $10^3 \cdot 10^{12} = 10^{15}$, ecc.

Negli **Stati Uniti d'America**, e dal 1974 anche nel **Regno unito** e, in genere, nel mondo anglosassone:

il ***billion*** equivale a *mille million* (10^9 = 1 000 000 000).
il ***trillion*** equivale a *mille billion* (10^{12} = 1 000 000 000 000).
il ***quadrillion*** equivale a *mille trillion* (10^{15} = 1 000 000 000 000 000).
il ***quintillion*** equivale a mille *quadrillion* (10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000).

Il termine *milliard* è caduto in disuso; al suo posto si usa *billion* e i suoi multipli.

Si ha pertanto (negli **Stati Uniti d'America**): million = 10^6, billion = 10^9, trillion = 10^{12}, quadrillion = 10^{15}, quintillion = 19^{18}, e via a seguire.

La ***scala lunga***, quella che si usa in **Italia**, è la più diffusa nel mondo, mentre la ***scala corta***, quella che si usa negli **Stati Uniti d'America**, è utilizzata e nei paesi anglosassoni e in **Brasile** e in **Cina** e in **Giappone**; nelle due **Coree**, in **India**, in **Pakistan**, non usano né l'una né l'altra.

La matematica francese **Geneviève Guitel**, introdusse, nel 1975, i termini, utilizzati ancora adesso, di: ***échelle longue*** (tradotto in italiano in *scala lunga*) e ***échelle courte*** (tradotto in italiano in *scala corta*).

La ***Scala lunga*** si riferisce ad un *sistema di nomi numerici* in cui ogni termine è 1.000.000 (10^6) di volte più grande del precedente: un *bilione* corrisponde ad un *milione di milioni* (10^{12}), un *triliardo* a un *milione di biliardi* (10^{21}), e così via.

La ***Scala corta*** Si riferisce ad un *sistema di nomi numerici* in cui ogni termine è 1000 (10^3) volte più grande del precedente: per esempio un *billion* (*bilione*) corrisponde a *mille millions* (*mille milioni* = 10^9), un *trillions* a *mille billions* (*mille bilioni* = 10^{12}), e così via.

Bisogna prestare particolare attenzione, pertanto, nell'interpretare un numero scritto nel *sistema di nomi numerico*, specie se è presente in un testo inglese; in caso contrario si rischia di commettere un errore di diversi ordini di grandezza.

Curiosità

Nel libro «**Dio è un matematico**» si legge testualmente: «(provate a scrivere per esteso su un assegno 8,4 miliardi di dollari, il debito pubblico statunitense nel luglio del 2006, nello spazio destinato alla cifra in numeri).».

Il debito pubblico italiano si aggira intorno ai **1 800** miliardi di euro, da cui si può desumere che vi sia stato un banale errore d'interpretazione da parte dei traduttori; quasi sicuramente, il debito pubblico americano, nel luglio del 2006, era stato di **8 400** miliardi di dollari (tre ordini di grandezza maggiore).

la frase originale è *«(try writing a personal check for $8.4 trillion, the U.S. national debt in July 2006, in the space allocated for the figure amount)»*.

Trillion (10^{12} = mille miliardi), quindi proprio 8 400 miliardi di dollari.

Per chi ne sa un poco di più

Logaritmi o naturali o Neperiani

Non disponendo di una calcolatrice con le funzioni logaritmiche è ugualmente possibile, usando prima il tasto della radice quadrata e poi quello del prodotto, ottenere il valore del *logaritmo naturale* di un numero «a», con la precisione desiderata.

I logaritmi o ***naturali*** o ***neperiani*** o ***iperbolici*** «ln», sono quelli in base «*e*» ($\log_e a = x$) con *e* = 2,718 281 828 459 045 235 4 . . .; i logaritmi decimali «log» sono quelli in base «10» $\log_{10} a = x$ (in questo caso l'indicazione della base si omette, e diviene: log a = x).

Curiosità

Il valore di «*e*» è dato da: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Ricaviamo, per esempio, il logaritmo naturale «ln» del numero «53» con quattro cifre dopo la virgola, ma invece di utilizzare una calcolatrice scientifica, seguiamo un'altra via.

È sufficiente estrarre la radice quadrata del numero «n» e poi, via via, la radice dei risultati che si susseguono, fino ad ottenere un numero che ha, subito dopo la virgola, un numero di zeri corrispondente al numero di cifre significative che desideriamo ottenere.

Estraiamo la radice quadrata del numero «53», poi estraiamo la radice quadrata del risultato ed ancora del risultato, fino ad ottenere, alla fine, un numero composto dall'unità seguita da un certo numero di zeri subito dopo la virgola.

Il numero di zeri dopo la virgola definisce la precisione del risultato; il numero degli zeri è uguale al numero delle cifre significative del risultato, che si possono considerare.

Ora sottraiamo l'unità.

Infine moltiplichiamo per due il numero appena ricavato, poi moltiplichiamo per due anche il risultato ed ancora il risultato, per un numero di volte uguale a quante volte abbiamo estratto la radice quadrata.

Il numero così trovato, o meglio, il numero delle prime cifre significative del numero così trovato, pari al numero degli zeri subito dopo la virgola, è il risultato cercato.

Vediamo l'operazione più in dettaglio: prendiamo il numero «53», ne estraiamo la radice quadrata e continuiamo ad estrarre la radice quadrata dei vari risultati che si susseguono.

Dopo 16 operazioni otteniamo, come risultato, il numero 1,000 060 584; l'unità seguita da quattro (4) zeri dopo la virgola [tab, A].

Il numero degli zeri dopo la virgola è uguale a quattro (4), pertanto saranno quattro le cifre significative.

Adesso si sottrae l'uno dal numero 1,000 060 584, ottenendo il numero 0,000 060 584; si moltiplica quindi quest'ultimo numero per due «2», per 16 volte (numero di volte che si è estratta la radice quadrata) [tab. B].

A				B		
01	√**53**	= 7,280109889	01	0,000060584	• 2	= 0,000121168
02	√ 7,280109889	= 2,698167876	02	0,000121168	• 2	= 0,000242336
03	√ 2,698167876	= 1,642610080	03	0,000242336	• 2	= 0,000484672
04	√ 1,642610080	= 1,281643508	04	0,000484672	• 2	= 0,000969344
05	√ 1,281643508	= 1,132096951	05	0,000969344	• 2	= 0,001938688
06	√ 1,132096951	= 1,064000447	06	0,001938688	• 2	= 0,003877376
07	√ 1,064000447	= 1,031503973	07	0,003877376	• 2	= 0,007754752
08	√ 1,031503973	= 1,015629841	08	0,007754752	• 2	= 0,015509504
09	√ 1,015629841	= 1,007784620	09	0,015509504	• 2	= 0,031019008
10	√ 1,007784620	= 1,003884764	10	0,031019008	• 2	= 0,062038016
11	√ 1,003884764	= 1,001940499	11	0,062038016	• 2	= 0,124076032
12	√ 1,001940499	= 1,000969779	12	0,124076032	• 2	= 0,248152064
13	√ 1,000969779	= 1,000484772	13	0,248152064	• 2	= 0,496304128
14	√ 1,000484772	= 1,000242357	14	0,496304128	• 2	= 0,992608256
15	√ 1,000242357	= 1,000121171	15	0,992608256	• 2	= 1,985215612
16	√ 1,000121171	= 1,000060584	16	1,985216512	• 2	= 3,970433024

Il risultato finale è 3,970 433 024 di cui però si devono considerare solo le prime quattro (4) cifre significative: **3,970** 433 024.

Pertanto si può affermare che «ln 53» è, con quattro cifre significative: ln 53 = 3,970.

Naturalmente si può pervenire allo stesso risultato moltiplicando il numero 0.000060584 per 2^{16}: 0,000 060 584 • 2^{16} = 0,000 060 584 • 65 536 = **3,970** 433 024.

Per contro potete procurarvi una calcolatrice scientifica (quella presente nel vostro calcolatore va benissimo), scrivete il numero «53» e premete il tasto su cui è scritto o «LN» o

«In»; vedrete comparire sulla mostra (sul display per chi preferisce i termini inglesi) il numero «3,970291914» che è appunto il logaritmo naturale di «53».

La prova dell'undici

Si è detto che la ***prova del nove*** funziona soltanto o con le *moltiplicazioni* o con le *addizioni* o con le *sottrazioni* (non funziona con le *divisioni*) e si è spiegato il procedimento da usare, ma si è taciuto il perché questo procedimento funziona.

Il motivo risiede in quella che si chiama ***aritmetica modulare***; operazione che, inconsciamente, facciamo quando calcoliamo, mentalmente, che *quattro* ore dopo le *dieci* del mattino sono le *due* del pomeriggio.

Eseguire la prova del nove significa eseguire l'operazione ***modulo nove***; in pratica, si sostituisce, ai numeri trovati, il loro resto quando si dividono per nove.

Un esempio più esaustivo dell'applicazione del *calcolo modulare* lo si può trovare nella dispensa dello stesso Autore [**Il Manualetto del Wayfaring**, in **L'Epatta**].

Possiamo ora renderci conto del perché il resto *modulo nove* di un numero è uguale alla somma delle sue cifre: «1» diviso «9» fa «0» con resto «1», «10» diviso «9» fa «1» con resto «1», «100» diviso «9» fa «11» con resto «1», e così via.

Se prendiamo il numero «375» e lo scriviamo come: 3 • 100 + 7 • 10 + 5, scopriamo che il suo resto diviso «9» è uguale a (3 + 7 + 5 = 15), (1 + 5 = **6**); la somma delle sue cifre.

La logica che sta dietro la ***prova dell'undici*** è concettualmente la stessa; forse un poco più complicata, ma con qualche vantaggio.

Il metodo consiste e nel *sottrarre* e nel *sommare*, alternativamente, le cifre che compongono il numero in esame, partendo da *destra* ed andando verso *sinistra*.

Nell'ipotesi che, nell'eseguire una sottrazione, si dovesse rischiare di andare sotto zero, basterebbe semplicemente aggiungere un «11» al sottraendo.

Il vantaggio, importante, consiste nel potersi accorgere sia dell'aver scambiato di posto due cifre sia d'aver scambiato uno zero con un nove, o viceversa.

Prendiamo gli stessi dati utilizzati in: [**La prova del nove**, a pagina **3**].

375 • 38 = 14 250
375: ((5 + 11) - 7 + 3 = 12), (2 - 1 = **1**).
38: (8 – 3 = **5**).
14250: ((0 + 11) – 5 + 2 – 4 + 1 = **5**).
1 • 5 = **5** uguale al resto modulo 9 di 14 250.

238 + + 132 = 370
238: (8 – 3 + 2 = 7).
132: ((2 + 11) - 3 + 1 = 11), (1 - 1 = **0**).
370: ((0 + 11) - 7 + 3 = **7**).
7 + 0 = 7 uguale al resto modulo 9 di 370.

23 – 7 = 16
23: (3 - 2 = 1).
7: (7).
16: (6 - 1 = 5).
((1 + 11) – 7 = 5 uguale al resto modulo 9 di 16.

Prendiamo ora in esame solo la *moltiplicazione*; sia per l'addizione sia per la sottrazione, valgono le medesime considerazioni.

Scambiamo, nel risultato, due delle sue cifre; consideriamo, come risultato ottenuto, il numero «14 520» al posto di quello corretto «14 250».

375 • 38 = 14 520
375: ((5 + 11) - 7 + 3 = 12), (2 - 1 = **1**).
38: (8 – 3 = **5**).
14520: ((0 + 11) - 2 + 5 - 4 + 1 = 11), (1 - 1 = **0**)
1 • 5 = **5** differente dal resto modulo 9 di 14 520.

Scambiamo, nel risultato, una cifra 0 con la cifra 9; consideriamo, come risultato ottenuto, il numero «14 259» al posto di quello corretto «14 250».

375 • 38 = 14 529
375: ((5 + 11) - 7 + 3 = 12), (2 - 1 = **1**).
38: (8 – 3 = **5**).
14520: (9 - 2 + 5 - 4 + 1 = **9**).
1 • 5 = **5** differente dal resto modulo 9 di 14 520.

Come abbiamo potuto costatare, con la prova dell'«11» possiamo renderci conto sia di uno scambio di posizione fra due, o più cifre, sia di uno scambio di un nove «9» con uno zero «0», o viceversa, e non è poco.

Tavole logaritmiche e logaritmi

Chi si volesse cimentare nell'uso delle *tavole logaritmiche*, tanto per assaporare il gusto del tempo passato troverebbe, sbagliando, che per ottenere il risultato basterebbe una semplice calcolatrice scientifica in cui è presente e il semplice e il banale tasto [log].

Senza inoltrarsi nella complessa teoria dei logaritmi, si possono evidenziare soltanto alcune caratteristiche dei logaritmi ricavati con le relative tavole.

Ogni logaritmo decimale «log» è costituito, infatti, da una parte intera (***caratteristica***) e da una parte decimale (***mantissa***); la *mantissa* è sempre positiva, mentre la *caratteristica* può essere o *positiva* o *negativa*.

Ricordiamo la regola della ***caratteristica***:

♦ la *caratteristica* del logaritmo decimale di un numero «N», maggiore di uno «1», è data da tante unità positive quante sono le cifre intere di «N» meno una; la *caratteristica* del logaritmo decimale di un numero «N», minore di uno «1», è data da ante unità negative quanti sono gli zeri che precedono la prima cifra significativa, contando anche lo zero che precede la virgola.

♦ quando la *caratteristica* è negativa, il segno «-» si scrive sopra di essa ad indicare che la *mantissa* che segue è invece sempre positiva.

Se si cerca sulle *tavole trigonometriche* il valore di «log 247», si trova che la *mantissa* è uguale a «392 70», mentre la *caratteristica* è «2» (tre cifre intere, del numero, meno una); si ha pertanto: log 247 = 2,392 70.

Se si verifica il risultato con una calcolatrice scientifica, si ottiene lo stesso risultato, considerando sempre cinque cifre decimali dopo la virgola.

Ossevazioni

Le ***tavole logaritmiche*** forniscono sempre la *mantissa* con un determinato numero di cifre significative (nel nostro caso solo cinque «5»); si possono ottenere, in verità, anche più cifre, sfruttando la ***differenza tabulare***, ma questo procedimento esula dai nostri scopi.

Se ora si cerca sulle *tavole trigonometriche* il valore di «log 0,005 39», si trova che la *mantissa* è uguale a «73 159», mentre la caratteristica è «$\bar{3}$» (tre zeri che precedono la prima cifra significativa); si ha pertanto: log 0,005 39 = **$\bar{3}$,731 59.**

Verifichiamo il risultato con una *calcolatrice scientifica* e (considerando sempre cinque cifre decimali dopo la virgola, come ottenuto dalle tavole) troviamo, credo inaspettatamente, come risultato: log 0.00539 = **-2,268 41**.

La calcolatrice è forse guasta? O sono sbagliate le *tavole trigonometriche*?

Né l'una né l'altra ipotesi sono corrette; la differenza risiede in un'affermazione che, forse, è passata in'osservata: **nelle *tavole trigonometriche* la *mantissa* è sempre positiva, mentre la *caratteristica* può essere o *positiva* o *negativa*.**

La *calcolatrice scientifica*, più precisamente il suo tasto [log], fornisce invece il vero logaritmo in cui **sia la *caratteristica* sia la *mantissa* o sono *ambedue positive* o sono *ambedue negative*.**

Abbiamo detto, in precedenza, che nel logaritmo trovato sulle tavole, la *mantissa* è sempre positiva, mentre il segno si riferisce esclusivamente alla *caratteristica*; questo vuol dire che il risultato «$\bar{3}$,731 59», significa, in effetti: -3 + 0,731 59 = **-2,268 41** (lo stesso numero ottenuto con la calcolatrice scientifica).

Ambedue gli strumenti, le ***tavole logaritmiche*** e ***la calcolatrice scientifica***, forniscono in risultato corretto, espresso però in due differenti modi.

Le terne pitagoriche aritmetiche

Potrebbe essere interessante conoscere l'algoritmo per ottenere le ***terne pitagoriche primitive***; tre numeri naturali tali per cui verificano il ***teorema di* Pitagora**: $a^2 + b^2 = c^2$.

Osservazioni

Una terna pitagorica si dice *primitiva* se *a*, *b* e *c* non hanno divisori comuni; ad esempio sono ***terne pitagoriche primitive***: 3 4 5, 5 12 13.

Sembra che i ***babilonesi*** fossero già in possesso di un metodo per determinare le terne pitagoriche, come sembra dimostrare la tavoletta mesopotamica, conosciuta col numero di catalogo *Plimpton* 322, che contiene alcune terne pitagoriche espresse in sessantesimi.

Comunemente si attribuisce a Pitagora un metodo, per ottenere terne pitagoriche, basato sullo ***gnomone*** dei numeri quadrati.

Osservazioni
Si chiama ***gnomone***, in ogni parallelogramma, uno qualsiasi dei parallelogrammi posti intorno ad una sua diagonale insieme con i due complementi [vedi oltre: **Lo gnomone** in **Appendice «b»**].
Un numero è un numero quadrato quando può essere disposto a forma di quadrato; abbiamo pertanto $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)_2$.

Un primo algoritmo che, nonostante fornisca un numero infinito di terne, non le fornisce tutte, manca ad esempio la terna: 8 – 15 – 17, è.

$$n = \frac{k^2 - 1}{2}, k, n + 1 = \frac{k^2 + 1}{2}$$ con k numero naturale dispari

$a := k$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$b := n = \frac{k^2 - 1}{2}$	4	12	24	40	60	84	112	144	180	220	264
$c := n + 1 = \frac{k^2 + 1}{2}$	5	13	25	41	61	85	113	145	181	221	265

Un secondo algoritmo, attribuito al filosofo greco **Platone** (427 a.C. – 348 a.C.), generalizza il metodo platonico.

$$k^2 - 1, 2k, k^2 + 1$$ con k numero naturale

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a := k^2 - 1$	3	8	15	24	35	48	63				
$b := 2 \bullet k$	4	6	8	10	12	14	16				
$c := k^2 + 1$	5	10	17	26	37	50	65				

Analizzando le due tabelle, possiamo costatare che mentre nella prima le terne sono semplici (non hanno divisori comuni), nella seconda, per contro, le colonne che corrispondono a valori dispari di «k» si possono semplificare dividendo i valori per due; si ottengono, in questo modo, i valori della prima tabella.
Esiste, parimenti, un algoritmo che fornisce tutte le terne pitagoriche.

$$a = x^2 - y^2, \quad 2 \bullet x \bullet y, \quad b = x^2 + y^2$$

In cui: x, y, devono essere numeri naturali primi fra loro e di parità diversa, questo se vogliamo sia che non si ripeta alcuna terna sia che le terne siano tutte semplici, senza fattori comuni.

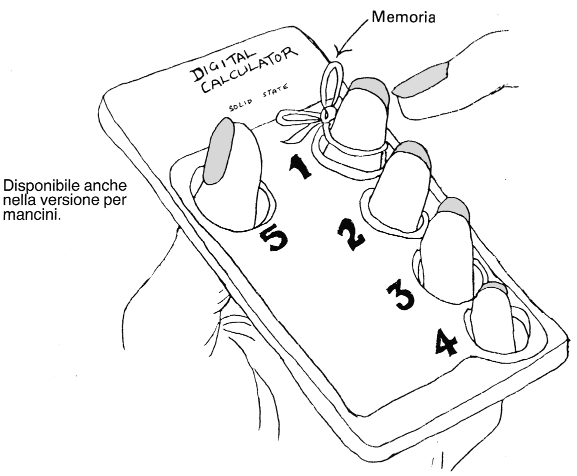
Le quaterne

Ci si potrebbe chiedere se esistono soluzioni anche per l'equazione diofantea:

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

Si! Esistono, e ve ne forniamo una:
$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 = 216$

La calcolatrice più semplice



Per poterla utilizzare, bisogna consultare il ***corposo*** *libretto delle istruzioni pubblicato in più di novantasette lingue fra cui: il geroglifico, l'etrusco, il sanscrito, il codice Morse (in latino), il Braille (in lugudorese); su richiesta scritta in carta bollata, è possibile averlo, entro 12 mesi, anche in italiano, ricopiato pazientemente a mano (in calligrafia!).*

Indice analitico

Paragrafi pagina

Prefazione 02
Ringraziamenti 02

«Antiche» metodiche matematiche

Moltiplicazioni, divisioni, elevazioni a potenza, estrazione di radice, funzioni trigonometriche, prima della calcolatrice

Introduzione 03
Le tavole numeriche logaritmiche 03
Moltiplicazione 03
Divisione 04
Elevazione a potenza 04
Estrazione di radice 04
Le tavole trigonometriche logaritmiche 04
Le tavole aritmetiche 04
Le tavole dei valori naturali 05
Somma in piene precisione 05
Moltiplicazione in piena precisione (1° metodo) 05
Moltiplicazione in piena precisione (2° metodo). 06
Divisione in piena precisione 08
Prime conclusioni 09

Ciò che sarebbe utile sapere, ma che a scuola non si insegna più

Le divisioni con carta e penna 10
La prova del nove 10
moltiplicazione 11
somma 11
differenza 11
Stima iniziale della radica quadrata 12
Calcolo della radice quadrata con carta e penna 12
Calcolo della radice quadrata senza il tasto «√» 13
Numeri quadratici 14
Conversione di un numero decimale periodico in frazione 14
Minimo comune multiplo (mcm) 15
Massimo comune divisore (MCD) 15
MCD & mcm 15
Conversione di numeri da base «10» a base «n» 15
Conversione da base 10 (numeri decimali) a bese 16 (numeri esadecimali$_{16}$) . 15
Conversione da base 10 (numeri decimali) a base 8 (numeri ottali$_{8}$) . . 16
Conversione da base 10 (numeri decimali) a base 2 (numeri binari$_{2}$) . . 16
Conversione di numeri da base «n» a base «10» 16
Conversione da base 2 (numeri binari$_{2}$) a bese 10 (numeri decimali) . . 16
Conversione da base 8 (numeri ottali$_{8}$) a base 10 (numeri decimali) . . 17
Conversione da base 16 (numeri esadecimali$_{16}$) a base 10 (numeri decimali) . 17
una scorciatoia 17
Conversione da base 2 (numeri binari$_{2}$) a base 16 (numeri esadecimali$_{16}$) . 17
Conversione da base 16 (numeri esadecimali$_{16}$) a base 2 (numeri binari$_{2}$) . 17

Ciò che a scuola non si è mai insegnato, ma . . . fanno bene a non insegnarlo

Il sistema romano antico 18
Un metodo per moltiplicare 18
Un metodo per dividere 18

Un secondo metodo per moltiplicare 19
Gli ossi di Napier 19
La moltiplicazione (primo caso) 20
La moltiplicazione (secondo caso) 20
La radice quadrata con gli ossi di Napier 21
Un terzo metodo per moltiplicare 22
I regoli di Genaille-Lucas 23
La moltiplicazione 24
I regoli di Genaille-Lucas (atto secondo) 24
La divisione 24
Una moltiplicazione *molto poco* usata 26
Un primo metodo per sottrarre (ancora meno usato) 26
L'abaco 27
L'abaco romano 27
L'abaco cinese (Suan pan) 27
L'abaco giapponese (Soroban) 28
Il regolo calcolatore 28
Prodotto 28
Le moltiplicazioni per nove 29
Alcune strane moltiplicazioni 29
Quando per andare da CAGLIARI a PIRRI si passa per SASSARI . . . 30
Criteri di divisibilità 30
Qualche curiosità su alcune moltiplicazioni 31
Moltiplicazione per cinque (5) 31
Moltiplicazione per venticinque (25) 31
Moltiplicazione per centoventicinque (125) 31
Moltiplicazione per nove (9) o per novantanove (99) 31
Moltiplicazione per undici (11) 31
Moltiplicazione per potenze di due (2^n) 32
Qualche curiosità su alcune divisioni 32
Divisione per cinque (5 32
Divisione per venticinque (25) 32
Divisione per centoventicinque (125) 32
Divisione per potenze di due (2^n) 32
Qualche curiosità su alcune elevazioni al quadrato 32
Il quadrato di un numero a due cifre terminante per cinque (5) . . . 32
Un altro modo per eseguire la radice quadrata 33
Un calcolo impossibile da fare a mente . . . o quasi 33
Oltre ogni limite 34
Uno strano procedimento per la moltiplicazione 34
Le scale dei nomi numerici 35

Per chi ne sa un poco di più

Logaritmi o naturali o Neperiani 36
La prova dell'undici 37
Tavole logaritmiche e logaritmi 38
Le terne pitagoriche aritmetiche 38
Le quaterne 39
La calcolatrice più semplice 39

Indice analitico 40
Bibliografia essenziale 42

Bibliografia essenziale

[R. 01] Albrecht Beutelspacher 2008
Le meraviglie della matematica
Adriano Salami Editore Varese

[R. 02] Albrecht Beutelspacher 2007
Matematica da tasca
Adriano Salami Editore Varese

[R. 03] Claudi Alsina 2010
La setta dei numeri (Il teorema di Pitagora)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 04] David R. Green – John Lewis 1980
Le scienze con il calcolatore tascabile
franco muzzio & c. editore Padova

[R. 05] Italo Ghersi 1967
Matematica dilettevole e curiosa
Editore Ulrico Hoepli Milano

[R. 06] Fernando Corbalàn 2010
La sezione aurea (Il linguaggio matematico della bellezza)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 07] Joaquin Navarro Sandalinas 2012
Eulero (L'analisi matematica) numeri al limite
Grandi idee della scienza
Rotativas de Estella Navarra

[R. 08] Josep Pla i Carrera 2012
Euclide (La geometria) Il mondo a tre dimensioni
Grandi idee della scienza
Rotativas de Estella Navarra

[R. 09] Josep Sales e Francesc Banyuls 2011
Curve pericolose (Ellissi, Iperbole e altre meraviglie geometriche)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 10] Juanjo Rué 2011
L'arte di contare (Calcolo combinatorio ed enumerazione)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 11] Luigi Brasca – Eugenio Levi 1966
Tavole per calcoli di topografia ed estimo
ghissetti & corvi – editore Milano

[R. 12] Marcos Jaén Aànchez 2013
Pitagora (Il teorema di Pitagora) Un segreto racchiuso da tre pareti
Grandi idee della scienza
Rotativas de Estella Navarra

[R. 13] Martin Gardner 1984
Show di magia matematica
Arti Grafiche Emiliane Bologa

[R. 14] Michael R. Williams 1989
Storia dei computer (Dall'abaco ai calcolatori elettronici)
franco muzzio & c. editore Padova

[R. 15] Miquel Alberti 2010
La creatività matematica (Come funzionano le menti straordinarie)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 16] Pere Grima 2010
La certezza saaoluta e altre finzioni (I segreti della statistica)
Mondo matematico

Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 16] Paolo Baraggia – Nora Nava 1987
Elementi di probabilità e statistica
Lito Velox Trento

[R. 17] Raymond Smullyan 1985
Qual è il titolo di questo libro?
Grafiche Galeati Imola

[R. 18] Rufiàn Lizana Antonio 2013
Gauss (la teoria dei numeri)
Grandi idee della scienza
Rodesa Villatuerta Navarra

[R. 19] Vicenç Torra 2011
Dal pallottoliere alla rivoluzione digitale (Algoritmi e informatica)
Mondo matematico
Rodesa Villatuerta Navarra