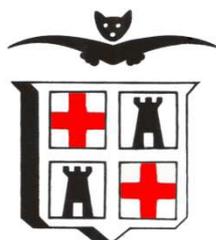


# Scuola di speleologia di Cagliari della CNSS-SSI



## Speleo Club di Cagliari

Un antico metodo per la  
stima della profondità

*Il «Pietrometro»*

*Paolo Salimbeni*



Comitato  
Esecutivo  
Regionale  
Sardegna

Commissione  
Nazionale  
Scuole  
di Speleologia



Anno 7E202

# Testi Tecnici

Prima edizione 09 / 1990

**Ultima edizione 02 / 2018**

## Prefazione

Questa non è una vera nuova versione della dispensa, essendo sostanzialmente uguale alla penultima e senza aggiunte e senza variazioni di rilievo (è stata aggiunta una sola precisazione resasi forse necessaria).

Mi sono finalmente convinto ad aggiornarla, dopo circa *quattro* anni (la precedente edizione risale al 01 / 2013), praticamente solo per sostituire il punto (separatore fra la parte intera e la parte decimale di un numero) con la più appropriata virgola, norma che ormai segue (se ti interessa da quando, leggi la dispensa «*L'elasticità nelle corde speleo-alpinistiche*» a pagina 3).

Purtroppo nei diagrammi sono rimasti i punti, come *separatori*, e resteranno lì forse per parecchio, fino a quando non troverò e la voglia ed il tempo e la motivazione giusta per riottenerli con un programma per grafici più moderno sia che mi permetta di scegliere il *separatore* voluto sia che funzioni sul *nuovissimo Windows 10* che ormai spadroneggia in tutti i calcolatori (o personal computer o PC, per chi preferisce e i termini e gli acronimi inglesi).

L'Autore sarà grato a tutti quelli che gli segnaleranno eventuali od *errori* od *imprecisioni* (sono graditi anche e *consigli* e *opinioni*).

via P. Cavaro, 73 09131 Cagliari  
cellulare.: +39 3493897629  
e-mail: [p.salimba@gmail.com](mailto:p.salimba@gmail.com)

Questa ed altre dispense, sempre dello stesso Autore, nel sito di **Paolo Salimbeni** <<http://www.paolosalimbeni.it>>; vedi in: **Dispense**.

Dello stesso Autore, e nel medesimo sito, alcune presentazioni in **PowerPoint**; vedi in: **Presentazioni**.

## Copyright © Paolo Salimbeni

Tutti i diritti sono riservati, a norma di legge ed a norma delle convenzioni internazionali; nessuna parte dell'opera può essere riprodotta, tradotta o diffusa, in qualsiasi forma o sistema (per fotocopia, microfilm, supporti magnetici, o qualsiasi altro procedimento), o rielaborata o trasmessa, con l'uso di sistemi elettronici, senza l'autorizzazione scritta dell'autore. . . . **o no ?!**

All rights reserved, no part of this book may be reproduced, who may quote brief passages or reproduce illustrations in un review with appropriate credit; nor ay any part of this book be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means electronic, photocopying, recording, or other without permission in writing from the Author. . . . **or not ?!**

# Un antico metodo per la stima della profondità

## Il «Pietrometro»

### Premessa

E' forse un metodo antico quanto l'uomo quello di lasciar cadere un sasso dalla sommità di una voragine, o dal ciglio di uno strapiombo, per cercare di stimare la profondità, del baratro, misurando semplicemente il tempo impiegato, dal sasso, a giungere sul fondo.

In principio era solo l'esperienza, il *senso del tempo*, a permettere una rapida anche se grossolana valutazione del dislivello.

Più avanti si iniziò a misurare il tempo di caduta con normali cronometri da polso ed utilizzare poi i valori, così ottenuti, per risolvere formule elementari; ma il calcolo era ugualmente laborioso e i risultati non sempre soddisfacenti.

In seguito furono pertanto proposte diverse tabelle, compilate in genere sulla base dei risultati ottenuti con misurazioni dirette, dalle quali però si può ricavare il probabile dislivello solo per i tempi di caduta espressamente indicati.

Per contro l'Autore, pur riconoscendo i limiti di una *trattazione matematica*, cerca di seguire, per quanto possibile, un procedimento strettamente analitico impostando le equazioni, necessarie a descrivere l'evolversi del fenomeno, sulla base delle leggi della dinamica dei fluidi.

In tal modo perviene all'enunciazione di una *formula generale* la cui risoluzione numerica fornisce, come risultato, il probabile dislivello per qualsiasi tempo cronometrato e per qualsiasi condizione termoigrometrica ambiente.

### Abstract

To replace the various schedules compiled on the basis of direct measurements where we indicate the probable depth of a shaft according to the time a stone takes to get to the bottom, the Authors proposes a new approach to this problem based on the laws of fluid dynamics.

Even if the Author acknowledges the limits of a mathematical approach, he has tried to follow a strictly analytical procedure, as far as possible.

His purpose, setting the equations necessary to describe the evolution of the phenomenon, was to arrive to enunciate a general formula, whose numerical solution could give, as a result, the probable difference in depth, related to any chronometer-measured time in any condition.

### La teoria

Nel caso l'esperimento fosse eseguito nel vuoto, sarebbe valida la semplice equazione del *moto naturalmente accelerato* nella quale si ha:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g = \text{costante}$$

**Essendo:** x = spazio percorso – t = tempo impiegato.

Integrando una prima volta rispetto al tempo «t» si otterrebbe:

$$v = g \cdot t$$

[01]

Essendo: v = velocità finale, espressa in metri al secondo «m • s<sup>-1</sup>», raggiunta dal grave dopo «t» secondi - g = accelerazione di gravità (per la Sardegna, al livello del mare, possiamo assumere, con ottima approssimazione: g = 9,80 m/s<sup>2</sup>) - t = tempo cronometrato dall'osservatore coincidente, in una prima ipotesi semplificativa, col tempo effettivo di caduta del grave.

e la velocità di caduta «v» aumenterebbe, in funzione lineare diretta rispetto al tempo «t», cronometrato dall'osservatore, fino all'impatto, del grave, sul fondo del pozzo.

Integrando una seconda volta, sempre rispetto a «t», si otterrebbe:

$$x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

[02]

**Essendo:** x = spazio, espresso in metri «m», percorso dal grave nel tempo «t»; noto il significato degli altri termini..

la quale fornirebbe il valore, *teoricamente esatto*, dello spazio «x» che il grave percorrerebbe nel tempo «t», cronometrato dall'osservatore (sempre nell'ipotesi che l'esperimento sia eseguito nel vuoto e che il tempo «t» coincida col tempo di caduta del grave).

La presenza dell'aria, per contro, invalida sia l'equazione [01] sia l'equazione [02] rendendo lo sviluppo del fenomeno affatto differente; la semplice equazione del *moto naturalmente accelerato* è inadeguata ad una descrizione analitica e si deve pertanto ricorrere ad un differente modello matematico che tenga conto della resistenza del mezzo.

Nell'ambito d'alti numeri di **Reynolds** una massa che si muove, attraverso un mezzo resistente, è soggetta ad una forza di ritardo pari alla quantità di moto trasferita al fluido, entro cui si muove, nell'unità di tempo:

$$F = \frac{dp}{dt} = -v \cdot \frac{dm}{dt} = -mr \cdot A \cdot Cd \cdot v^2 \quad [03]$$

**Essendo:** F = forza di ritardo (resistenza, al moto, incontrata dal grave) - p = quantità di moto trasferita, dal grave, al mezzo resistente (aria) - v = velocità relativa, del grave, rispetto al mezzo resistente - m = massa, del mezzo resistente, interessata dal fenomeno - mr = massa volumica del mezzo resistente (in atmosfera satura di vapor d'acqua, alla temperatura di 16 °C, possiamo assumere  $mr = 1,218 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) - A = area della sezione geometrica del grave, perpendicolare alla direzione dell'avanzamento - Cd = coefficiente di forma del grave.

In questa situazione la forza di «*frenamento*», dovuta alla viscosità del mezzo resistente (nel nostro caso aria satura di vapor d'acqua), è, rispetto all'energia cinetica impressa dal grave al gas, affatto trascurabile.

Risolvendo l'equazione del moto di una massa che cade, per effetto della sola forza gravitazionale, attraverso un mezzo resistente, fermo rispetto al suolo, si ottiene la nota equazione differenziale:

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = M \cdot g - mr \cdot Ae \cdot v^2 \quad \text{in cui: } M = mg \cdot Vg; \quad Ae = A \cdot Cd \quad [04]$$

**Essendo:** M = massa del grave - Ae = area della sezione efficace del grave, non coincidente con la sezione geometrica - mg = massa volumica del grave - Vg = volume del grave; noto il significato degli altri simboli.

Ciò significa che il grave non cadrà con accelerazione costante, come avverrebbe nel vuoto, ma la sua accelerazione decrescerà fino ad annullarsi (all'infinito); la sua velocità tenderà pertanto verso un valore limite costante, chiamato velocità critica (o asintotica), e corrispondente al regime stazionario, il cui valore è fornito dall'equazione:

$$Vc = \sqrt{\frac{M \cdot g}{mr \cdot Ae}} \quad [05]$$

**Essendo:** Vc = velocità critica (o asintotica); noto il significato degli altri simboli.

L'equazione [05] può essere risolta esattamente, per integrazione, e si ottiene, per una massa inizialmente a riposo, la semplice equazione:

$$v = Vc \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{g \cdot t}{Vc}\right) \quad [06]$$

**Essendo:** v = velocità finale raggiunta dal grave; tgh = tangente iperbolica.

Per valori di «t» molto piccoli la *tangente iperbolica* è dell'ordine del suo *argomento*, per cui si ha:

$$v = Vc \cdot \left(\frac{g \cdot t}{Vc}\right) = g \cdot t \quad [07]$$

che è l'espressione per l'accelerazione libera (nel vuoto).

Per valori di «t» molto grandi la *tangente iperbolica* tende asintoticamente all'*unità*, per cui si ha:

$$v = Vc \cdot 1 \quad [08]$$

che è appunto la velocità critica (o asintotica).

Per valori intermedi di «t» si utilizza l'equazione [06] che posta sotto diversa forma diviene:

$$v = Vc \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} \quad \text{In cui: } b = g \cdot t \cdot Vc^{-1} \quad [09]$$

**Essendo:** e = base dei logaritmi neperiani (o naturali).

Integrando l'equazione [06], rispetto al tempo «t», si ottiene:

$$x = \frac{Vc^2}{g} \cdot \ln(\cosh(b)) \quad [10]$$

**Essendo:** ln = logaritmo neperiano (naturale); cosh = coseno iperbolico.

che posta sotto diversa forma diviene:

$$x = \frac{Vc^2}{g} \cdot \ln \frac{e^b + e^{-b}}{2} \quad [11]$$

Dall'equazione [11] si ricava inoltre facilmente:

$$t = \frac{Vc}{g} \cdot \ln \left( e^j + \sqrt{e^{2j} - 1} \right) \quad \text{In cui: } j = x \cdot g \cdot Vc^{-1} \quad [12]$$

**Essendo:** t = tempo impiegato, dal grave, per percorrere lo spazio «x».

In realtà, e soprattutto nella pratica speleologica, l'analisi del fenomeno è alquanto più complessa infatti il tempo «t», cronometrato dall'osservatore, non coincide con il tempo di caduta del grave ma è la somma di «Te», tempo effettivo impiegato dal grave a giungere sul fondo del pozzo, e di «Ts», tempo impiegato dal suono a risalire, dal fondo del pozzo, fino all'osservatore:

$$t = Te + Ts \quad \text{In cui: } Ts = x \cdot Vs^{-1} \quad [13]$$

**Essendo:** Te = tempo effettivo di caduta del grave; Ts = tempo di risalita del suono; x = profondità del pozzo; Vs = velocità del suono in aria (in atmosfera satura di vapor d'acqua, alla temperatura di 16 °C, possiamo assumere Vs = 336 m • s<sup>-1</sup>).

l'equazione [12] deve pertanto essere corretta nell'equazione:

$$t = Te + Ts = \frac{Vc}{g} \cdot \ln \left( e^j + \sqrt{e^{2j} - 1} \right) + \frac{x}{Vc} \quad [14]$$

Nel vuoto questa correzione non avrebbe ovviamente alcun significato venendo a mancare il mezzo elastico indispensabile (aria) attraverso il quale avviene la propagazione delle onde acustiche.

Si presenta ora la necessità di ricavare «Te», in funzione di «t»; Te = f(t).

Impostando il sistema:

$$\begin{cases} Ts \cdot Vs = \frac{Vc^2}{g} \cdot \ln \left( \cosh \left( \frac{g \cdot Te}{Vc} \right) \right) \\ Ts = t - Te \end{cases} \quad [15]$$

e ponendo «w = Vs • g • Vc<sup>-2</sup>», dopo semplici passaggi, si perviene all'equazione:

$$e^{w \cdot t} = \text{ch} \left( \frac{g \cdot Te}{Vc} \right) \cdot e^{w \cdot Te} \quad [16]$$

L'equazione [16] pur assumendo un solo valore di «Te», per ogni valore di «t», non possiede alcuna forma risolutiva diretta; il valore di «Te» deve pertanto essere ricavato utilizzando un procedimento iterativo.

Sostituendo pertanto, nell'equazione [06], in tempo «t» col corrispondente tempo «Te», ottenuto dalla (06), si ottiene:

$$Ve = Vc \cdot \text{tgh} \left( \frac{g \cdot Te}{Vc} \right) \quad [17]$$

la quale fornisce la velocità finale effettiva «Ve» che il grave raggiungerebbe dopo un tempo di caduta effettivo «Te» ottenuto in funzione del solo tempo cronometrato «t».

Integrando l'equazione [17] si perviene all'equazione:

$$Xe = \frac{Vc}{g} \cdot \ln \left( \frac{e^k + e^{-k}}{2} \right) \quad \text{In cui: } K = g \cdot Vc^{-1} \cdot f(t) \quad [18]$$

La quale, posta sotto la forma definitiva, diviene:

$$Xe = \frac{Vc}{g} \cdot \ln(\cosh(K)) \quad [19]$$

la [19] fornisce lo spazio «Xe» percorso dal grave, corrispondente alla profondità del

pozzo, nel tempo effettivo «Te», funzione del solo tempo cronometrato «t».

L'equazione [18] deve comunque ritenersi teoricamente corretta solo nel caso sussistano contemporaneamente le condizioni semplificative assunte in precedenza: velocità iniziale del grave nulla, costanza dei parametri «Ae» e «mr» lungo l'intero percorso di caduta, errore umano, nella misurazione del tempo, sensibilmente nullo.

Per contro, e in particolar modo nella pratica speleologica, il grave è animato da una velocità iniziale generalmente non nulla (il sasso deve essere lanciato verso l'imboccatura del pozzo con l'impossibilità di lasciarlo cadere verticalmente), il coefficiente di forma «Cd», relativo alla sezione retta, varia in genere per effetto delle oscillazioni del grave attorno alla posizione di minima resistenza dinamica, la massa volumica del mezzo resistente «mr» varia in genere a causa delle diverse condizioni termoigrometriche presenti lungo il percorso dal grave, il tempo registrato dall'osservatore è affetto da un errore non nullo e non valutabile.

E' doveroso pertanto sottolineare che sodo apparentemente la rigida trattazione analitica del fenomeno conduce sicuramente a valori esatti, o soltanto più attendibili di quelli riportati nelle varie tabelle ricavate per via puramente empirica; i differenti valori che possono assumere le molte variabili in gioco: «mr», «A», «Cd», «mg», «Vg», pur possedendo range limitati, potrebbero infatti condurre, parallelamente agli scostamenti delle condizioni reali, dalle ipotesi teoriche, a risultati alquanto imprecisi.

Esistono infine alcune situazioni le quali potrebbero ingenerare, se erroneamente interpretate, grossolani errori di valutazione: strati d'argilla morbida che attutiscono il rumore dell'impatto in modo da renderlo non udibile dall'alto (i famosi pozzi senza fondo o profondi chilometri), fenomeni di rotolamento indotto che prolungano il rumore, della caduta, falsando la misurazione del tempo, impatti con le pareti del pozzo, caduta del sasso su cenge o terrazzamenti.

Potrebbero inoltre influire significativamente sui risultati, con un'incidenza difficilmente stimabile, eventuali forti correnti anemometriche verticali, sia ascendenti sia discendenti.

Dopo circa tre o quattro secondi, il grave cade emettendo un sibilo acuto d'intensità crescente che può divenire così alto da coprire il rumore dell'impatto; in questo caso, per contro, è l'interrompersi del sibilo a denunciare l'arresto della caduta.

## I risultati

Le notevoli difficoltà, sorte nel tentativo di costruire un modello matematico soddisfacente per il calcolo del valore medio del coefficiente «Cd», hanno suggerito il ricorso ad un metodo puramente stocastico; si è inoltre ritenuto più opportuno determinare direttamente il parametro «Ae» ( $Ae = A \cdot Cd$ ), piuttosto che i suoi singoli fattori separatamente, elaborando dati forniti da svariate prove sperimentali, eseguite in ambiente ipogeo, con diversi campioni del peso di circa quattro etti.

Si è potuto così ricavare per il parametro «Ae», (area della sezione efficace), un valore medio che si ritiene sufficientemente probabile.

$$\mathbf{Ae\ 29,75\ cm^2}$$

Sostituendo il valore di «Ae, nell'equazione [05], si ottiene, per «Vc», il valore di:

$$\mathbf{Vc\ 32,89\ m \cdot s^{-1}}$$

Sostituendo nell'equazione [01] e nell'equazione [09] il valore di «Vc», e risolvendo numericamente, si possono ricavare le curve relative alle velocità «V», espresse in metri al secondo, che il grave raggiungerebbe, sia nel vuoto «Vv» sia nell'aria «Va», dopo un tempo effettivo di caduta «Te», espresso in secondi. [Diagramma velocità n° 1].

Sostituendo nell'equazione [02] e nell'equazione [11] il valore di «Vc» e risolvendo numericamente, si possono ricavare le curve relative agli spazi «X», espressi in metri, che il grave percorrerebbe, sia nel vuoto «Xv» sia nell'aria «Xa», dopo un tempo effettivo di caduta «Te», espresso in secondi. [Diagramma spazi n° 2].

Nel diagramma [Diagramma tempi n° 3] sono state riportate le curve relative sia ai tempi effettivi di caduta del grave «Te» sia ai tempi di risalita del suono «Ts», ambedue espressi in secondi, in funzione del solo tempo «t», cronometrato dall'osservatore.

Nel diagramma [Diagramma velocità (in aria) n° 4] sono state riportate le curve relative alle velocità finali, espresse in metri al secondo, che il grave raggiungerebbe nell'aria in funzione del tempo «t», espresso in secondi, cronometrato dell'osservatore.

Nell'ipotesi semplificativa, iniziale, che i *tempi cronometrati* «t» coincidano con quelli *effettivi* «Te» (velocità di risalita del suono infinita:  $Vs = \infty$ ) si avrà la curva relativa alle velocità finali nell'aria «Va»; nell'ipotesi successiva, più approssimata, che i tempi cronometrati

«t» siano la somma di «Te» più «Ts» (tempo di risalita del suono «Ts» non nullo) si avrà la curva relativa alle velocità finali effettive «Ve».

Nel diagramma [Diagramma spazi n° 5] sono state riportate le curve relative agli spazi, espressi in metri, che il grave percorrerebbe nell'aria in funzione del tempo «t», espresso in secondi, cronometrato dall'osservatore.

Nell'ipotesi semplificativa, iniziale, che i tempi cronometrati «t» coincidano con quelli effettivi «Te» (velocità di risalita del suono infinita:  $V_s = \infty$ ) si avrà la curva relativa agli spazi percorsi nell'aria «Xa»; nell'ipotesi successiva, più approssimata, che i tempi cronometrati «t» siano la somma di «Te» più «Ts» (tempo di risalita del suono «Ts» non nullo) si avrà la curva relativa agli spazi effettivi percorsi «Xe».

Nel diagramma [Diagramma (Xe - Ve) n° 6] è stata riportata la rappresentazione, a nube di punti (*scatter diagram*) la quale evidenzia la corrispondenza biunivoca esistente fra gli spazi effettivi percorsi «Xe», e le velocità effettive raggiunte «Ve», funzioni del solo tempo «t», cronometrato dall'osservatore.

Nella tabella [tab. 01] è stato infine riportato un quadro riassuntivo nel quale, per alcuni valori del tempo «t» cronometrato dall'osservatore, è indicato il corrispondente valore della velocità finale nel vuoto «Vv», della velocità finale nell'aria «Va», dello spazio percorso nel vuoto «Xv», dello spazio percorso nell'aria «Xa», del tempo di risalita del suono «Ts», del tempo effettivo di caduta «Te» ( $T_e = t - T_s = f(t)$ ), della velocità finale effettiva «Ve» (raggiunta dal grave), dello spazio effettivo «Xe» (percorso dal grave).

t	Vv	Va	Xv	Xa	Ts	Te	Ve	Xe	Xm
0,5	4,90	4,86	1,23	1,22	0,004	0,50	4,83	1,20	<i>1</i>
1	9,80	9,52	4,90	4,83	0,01	0,99	9,39	4,70	<i>4</i>
1,5	14,70	13,79	11,03	10,68	0,03	1,47	13,55	10,26	<i>10</i>
2	19,60	17,57	19,60	18,54	0,05	1,95	17,20	17,63	<i>18</i>
2,5	24,50	20,79	30,63	28,15	0,08	2,42	20,32	26,53	<i>25</i>
3	29,40	23,46	44,10	39,24	0,11	2,89	22,92	36,70	<i>35</i>
3,5	34,30	25,62	60,03	51,53	0,14	3,36	25,05	47,91	<i>50</i>
4	39,20	27,34	78,40	64,78	0,18	3,82	26,77	59,96	<i>60</i>
4,5	44,10	28,68	99,23	78,80	0,22	4,28	28,14	72,66	<i>75</i>
5	49,00	29,71	122,50	93,41	0,26	4,74	29,22	85,88	<i>85</i>
5,5	53,90	30,50	148,23	108,47	0,30	5,20	30,06	99,50	<i>100</i>
6	58,80	31,10	176,40	123,88	0,34	5,66	30,71	113,44	<i>115</i>
6,5	63,70	31,55	207,03	139,54	0,38	6,12	31,22	127,62	<i>130</i>
7	68,60	31,89	240,10	155,41	0,42	6,58	31,61	141,99	<i>140</i>
7,5	73,50	32,15	275,63	171,42	0,47	7,03	31,91	156,50	<i>155</i>
8	78,40	32,34	313,60	187,54	0,51	7,49	32,14	171,12	<i>170</i>
8,5	83,30	32,48	354,03	203,75	0,55	7,95	32,32	185,83	<i>185</i>
9	88,20	32,58	396,90	220,01	0,60	8,40	32,45	200,60	<i>200</i>
9,5	93,10	32,66	442,23	236,33	0,64	8,86	32,56	215,42	<i>215</i>
10	98,00	32,72	490,00	252,67	0,69	9,31	32,64	230,28	<i>230</i>

[tab. 01]

E' stato inoltre indicato il valore «Xm» (in corsivo) corrispondente al valore «Xa» arrotondato, con poche eccezioni, ai cinque metri.

In [fig. 01] è riportato, a solo titolo esplicativo, il listato del programma, denominato **FONDIZZO.BAS** e scritto in **GW BASIC**, mediante il quale possono essere calcolati i valori riportati nella tabella [tab. 01].

Digitando «**GW BASIC FONDIZZO**» e premendo successivamente «**Invio**» la procedura da seguire è autoesplicativa (ovviamente bisogna disporre, nella medesima directory, del File eseguibile: «**GW BASIC.EXE**», contenente il linguaggio).

Il programma comprende esclusivamente le istruzioni *strettamente necessarie*, ma al lettore non risulterà difficile ampliarlo sia per una migliore e più completa presentazione sia, e soprattutto, per una buona gestione degli errori di input (caratteristica completamente assente nella presente versione); la sua semplicità consente inoltre a chiunque, in modo immediato, sia di apportare le modifiche che ritiene più opportune sia di tradurlo in altri linguaggi a lui più congeniali.

Il listato è strutturato in modo da permettere di impostare preventivamente i valori dei parametri «g», «Vc», «Vs», (risulta infatti sufficiente modificare, nella linea di programma

«1» i corrispondenti valori ivi presenti).

E' pertanto possibile eseguire misurazioni in qualsiasi luogo, in funzione sia della latitudine sia della quota (differenti potenziali gravitazionali), con qualsiasi grave, in funzione sia del peso sia della forma, e in qualsiasi ambiente, in funzione dei parametri sia barometrici sia termoigrometrici (differenti valori della velocità critica e differenti valori della velocità di propagazione del suono).

E' comunque disponibile, per chi lo desiderasse, il *programma completo*, compilato in «**QuikBasic**» e denominato **FONDIZZO.EXE**, ugualmente elaborato dall'Autore; il programma, come si desume dall'estensione, è un *eseguibile*.

Limitando il range, dei *tempi di caduta cronometrati*, all'intervallo compreso fra i 2,5 s e i 5 s, corrispondenti ad un intervallo della profondità compresa fra circa 25 m e circa 85 m, l'Autore propone una formula semplice, nonché discretamente approssimata, tramite la quale si possono ricavare i corrispondenti *spazi effettivi* «Xe», percorsi dal grave, in funzione del solo tempo «t», cronometrato dall'osservatore:

$$XL = 24 \cdot t - 35 \quad [19]$$

I valori ottenuti dalla risoluzione di questa funzione lineare dei tempi cronometrati «t» coincidono, se approssimati ai cinque metri, con i valori «Xm» presenti nella [tab. 01].

Molto più approssimata, nonché più complessa, è la funzione polinomiale di quinto grado i cui risultati coincidono al centimetro con i valori «Xe» forniti dall'equazione [18].

$$XP = 0,0016 \cdot t^5 - 0,0068 \cdot t^4 - 0,356 \cdot t^3 + 5,2115 \cdot t^2 - 0,1137 \cdot t \quad [20]$$

Nella [tab. 02] sono stati evidenziati i valori delle accelerazioni che si registrerebbero, sia nel vuoto sia nell'aria, prendendo in esame il tempo effettivo «Te».

«Av» è il valore dell'accelerazione normale di gravità (valido per la Sardegna ed al livello del mare); nel caso l'esperimento sia effettuato nel vuoto, risulta costante lungo tutto il percorso del grave.

«Aa» sono i valori dell'accelerazione, in diminuzione (tendenti asintoticamente a zero) lungo tutto il percorso, registrati ogni mezzo secondo; in questo caso i dati sono relativi all'esperimento effettuato in aria.

t →	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
Av	accelerazione nel vuoto: $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{costante}$																			
Aa	9,72	9,32	8,54	7,56	6,44	5,34	4,32	3,44	2,68	2,06	1,58	1,20	0,90	0,68	0,52	0,38	0,28	0,20	0,16	0,12

[tab. 02]

Nel diagramma [Diagramma accelerazioni n° 7] sono state riportate le curve relative all'accelerazione del grave sia nel vuoto (accelerazione *costante* pari a:  $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ), rappresentata dalla curva «Av», sia nell'aria rappresentata dalla curva «Aa»; i valori sono quelli presenti nella [tab. 02].

L'andamento della curva «Aa» indica chiaramente come nei primi secondi la forza di gravità prevalga sulla resistenza del mezzo mentre, in seguito, quest'ultima prende il sopravvento riducendo l'accelerazione asintoticamente a zero.

Nella [tab. 03] sono stati riportati, per alcuni valori del tempo cronometrato «t», i corrispondenti valori degli spazi di caduta effettivi «Xe» ottenuti dall'equazione [18], i valori arrotondati «Xm» ottenuti approssimando ai cinque metri i valori «Xe», i valori «XL» ottenuti dall'equazione lineare [19], le differenze «Sc», positive o negative, fra i valori «XL» e i corrispondenti valori «Xm», i valori «XP» ottenuti dall'equazione polinomiale.

t	Xe	Xm	XL	Sc	Xp
2,5	26,53	25	25	0	26,53
3	36,70	35	37	+2	36,70
3,5	47,91	50	49	-1	47,91
4	59,96	60	61	+1	59,96
4,5	72,66	75	73	-2	72,66
5	85,88	85	85	0	85,88

[tab. 03]

La tabella è logicamente ristretta a valori compresi nel *range* fra « $t \geq 2,5 \text{ s}$ » e « $t \geq 5 \text{ s}$ », intervallo di validità delle due equazioni: [19] e [20]; per « $t < 2,5 \text{ s}$ » o per « $t > 5 \text{ s}$ » l'equazione [19] fornisce valori «XL» che si scostano notevolmente dai corrispondenti valori «Xm» (es. per « $t = 1 \text{ s}$ », si avrebbe « $XL = -11 \text{ ?!}$ »); parimenti avviene, anche se in modo decisamente meno evidente, per l'equazione [20].

Nel [Diag. 8] sono state riportate le curve relative ai valori «Xe», «Xm», «XL» presenti nella [tab. 03]; osservando i valori estremi, rispettivamente per « $t < 2,5$  s» e « $t < 5$  s» si può notare come la curva «Xe» si stia ormai allontanando da quella «XL».

Nella tabella [tab. 04], oltre i valori: «Xv», «Xa», «Xe», «Xm» presenti anche nella tabella [tab. 01] e pertanto già noti, sono stati riportati, a semplice titolo comparativo e non nell'ordine di descrizione:

i valori sia degli spazi di caduta nel vuoto «**MXv**» sia degli spazi di caduta nell'aria «**MXa**» sia degli spazi di caduta effettivi arrotondati all'intero «**MXm**» (proposti da **G. E. Melegari** in bibliografia [R. 3]).

i valori degli spazi di caduta effettivi arrotondati all'intero «**M.G.**» (proposti da **G. Marbach** in [R. 2]).

i valori degli spazi di caduta effettivi arrotondati all'intero «**Pr.**» (proposti da **V. Prelovsek** in una propria monografia pubblicata in [R. 1]).

i valori degli spazi di caduta effettivi arrotondati all'intero «**R.O.**» (proposti da **G. Rossi-Osmida** in [R. 4]).

t	Xv	Xa	Xe	Xm	M.G.	MXv	MXa	MXm	Pr.	R.O.
1	4,90	4,83	4,70	4		4,90 <sub>5</sub>	4,5	4		5
2	19,60	18,54	17,63	18		19,6	18	16		20
2,5	30,63	28,15	26,53	25	25					
3	44,10	39,24	36,70	35	35	44,14	40	36	40	45
3,5	60,03	51,53	47,91	50	50					
4	78,40	64,78	59,96	60	60	78,48	66	58	60	80
4,5	99,23	78,80	72,66	75	75					
5	122,50	93,41	85,88	85	85	122,62	90	80		125
6	176,40	123,88	113,44	115		176,58	130	105	120	
7	240,10	155,41	141,99	140		240,34	168	130		
8	313,60	187,54	171,12	170					180	

[tab. 04]

Dall'esame della tabella [tab. 04] si può constatare un'eccellente corrispondenza fra i valori «Xm», derivati da quelli ottenuti dall'equazione rigorosa [19] (proposta dall'**Autore**), e i rispettivi valori «M.G.»; si può notare inoltre una buona corrispondenza fra i valori «Xm» e valori sia «Mxm» sia «Pr.».

Le differenze, peraltro minime, che si riscontrano fra i valori «Xv» e «MXv» sono da imputare al diverso valore dell'accelerazione di gravità assunto nei due casi:  $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  per «Xv»,  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  per «MXv».

Per quanto riguarda i valori «R.O.» è facile constatare che altro non sono che i valori «Xv» (o «MXv» indifferentemente) approssimati per eccesso ai cinque metri e pertanto ritengo i valori «R.O.» privi di interesse ed affatto trascurabili; la scarsa corrispondenza che si osserva con i corrispondenti valori «Xm» è oltremodo ovvia.

L'Autore tiene comunque a riaffermare, in modo particolare, il principio fondamentale per cui la tabella [tab. 01] non vuole correggere, né tanto meno infirmare, le diverse similari, proposte precedentemente e già edite in più pubblicazioni.

Il presente lavoro vuole semplicemente essere un ulteriore, modesto contributo, alla conoscenza di un fenomeno che nella sua apparente semplicità riserva, visto sotto una particolare ottica, delle inattese ed interessanti complicazioni concettuali ed analitiche.

### Una precisazione doverosa

Durante la **Conferenza Generale dei Pesì e delle Misure (CGPM)** del 1901 è stato assunto per l'accelerazione di gravità terrestre «g», presente ed al livello del mare ed alla latitudine di  $\varphi = 45^\circ 30'$  ( $\varphi = 45,5^\circ$ ), il valore convenzionale di  $g = 9,806 65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , generalmente approssimato a  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (alcune volte, questo valore viene indicato con « $g_0$ » per distinguerlo dell'effettiva accelerazione di gravità locale).

L'accelerazione gravitazionale terrestre «g» non è comunque una costante, ma varia, non considerando le anomalie localizzate, a seconda sia della latitudine geografica « $\varphi$ » sia della quota geodetica «h»; al livello del mare, il valore dell'accelerazione gravitazionale terrestre è di  $g = 9,823 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ai poli ( $\varphi = 90^\circ$ ) e di  $g = 9,789 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  all'equatore ( $\varphi = 0^\circ$ ).

Il valore di «g» locale, cui è sottoposto un corpo (una massa) che si trova e ad una latitudine « $\varphi$ » e ad un'altezza «h» sul livello del mare, può essere calcolato con la formula empirica semplificata:

$$g = 9,780\,318\,4 \cdot [1 + 0,005\,302\,4 \cdot \text{sen}^2 \varphi - 0,000\,005\,9 \cdot \text{sen}^2 (2 \cdot \varphi)] - 3,086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

In cui : g = accelerazione di gravità, espressa in «m • s<sup>-2</sup>» - φ = latitudine geografica, espressa in «°» - h = quota geodetica, espressa in «m».

#### Osservazioni

Nel caso il corpo fosse sulla verticale della terraferma, si dovrebbe aggiungere un'ulteriore correzione dovuta alla maggiore massa volumica che il terreno ha rispetto all'acqua (correzione di **Bouguer**) pari a  $C_B = 2 \cdot \pi \cdot G = 4,19 \cdot 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1} (\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1})$ , essendo «G» la **costante di gravitazione universale** pari a  $G = (6,674\,01 \pm 0,000\,31) \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ , generalmente approssimata a  $G = 6,67 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

La Sardegna è compresa fra la latitudine di  $\varphi_1 = 38^\circ 40'$  e  $\varphi_2 = 41^\circ 20'$  per cui, al livello del mare, utilizzando la formula empirica semplificata appena presentata, si ottiene:

$$g_{38^\circ 40'} = 9,8005 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_{41^\circ 20'} = 9,8029 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Con un valore medio di  $g_{40^\circ} = 9,801\,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (alla latitudine di  $\varphi = 39,5^\circ = 39^\circ 30'$ ).

Questo è il valore, approssimato a  $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , che si è utilizzato nei calcoli che, pertanto, sono ovviamente riferiti, in particolare, alla Sardegna.

## FONDIZZO.BAS

Programma che può essere utilizzato per il calcolo dei  
valori riportati in [tab. 01]

```

1 G = 9,80: VC = 32,89: VS = 336: E = 2,718281828#
REM G = accelerazione di gravità
REM VC = velocità critica o asintotica
REM VS = velocità del suono in aria (ambiente ipogeo)
REM E = base dei logaritmi naturali
10 CLS: XD = 0: LOCATE 3,5
20 INPUT "Tempo cronometrato in secondi (t (= 283) t = ", T
30 IF T > 283 THEN GOTO 10
40 VV = G * T: XV = T^2 * G / 2
50 A = G * T / VC: EU = E^A - E^-A: ED = E^A + E^-A
60 VA = VC * EU / ED: XA = VC^2 / G * LOG(ED / 2)
70 TS = XA / VS: TE = T - TS
80 AO = G * TE / VC: EU = E^AU - E^-AO: ED = E^AO + E^-AO
90 VE = VC * EU / ED: XE = VC^2 / G * LOG(ED / 2)
100 P = 10^3: XU = INT(XE * P + 0.5) / P
110 IF XU = XD THEN GOTO 140
120 XD = XU: TS = XE / VS: TE = T - TS
130 GOTO 80
140 LOCATE 7,10: PRINT "Vv = ";
150 PRINT USING "#####.##"; VV;
160 PRINT "  m/s"
170 LOCATE 7,37: PRINT "Va = "
180 PRINT USING "#####.##"; VA;
190 PRINT "  m/s"
200 LOCATE 9,10: PRINT "Xv = ";
210 PRINT USING "#####.##"; Xv;
220 PRINT "  m"
230 LOCATE 9,37: PRINT "Xa = "
240 PRINT USING "#####.##"; XA;
250 PRINT "  m"
260 LOCATE 11,10: PRINT "Ts = ";
270 PRINT USING "#####.##"; TS;
280 PRINT "  s"
290 LOCATE 11,37: PRINT "Te = " ;
300 PRINT USING "#####.##"; TE;
310 PRINT "  s"
320 LOCATE 13,10: PRINT "Ve = ";
330 PRINT USING "#####.##"; VE;
340 PRINT "  m/s"
350 LOCATE 13,37: PRINT "Xe = ";
360 PRINT USING "#####.##"; XE;
370 PRINT "  m"
380 LOCATE 22,42: PRINT "Premi <Spazio> per continuare"
390 LOCATE 23,42: PRINT "Premi <Esc> per tornare al DOS"
400 E$ = INKEY$: IF E$ = "" THEN GOTO 400
410 IF E$ = CHR$(32) THEN GOTO 10
420 CLS: SYSTEM

```

[fig. 01]

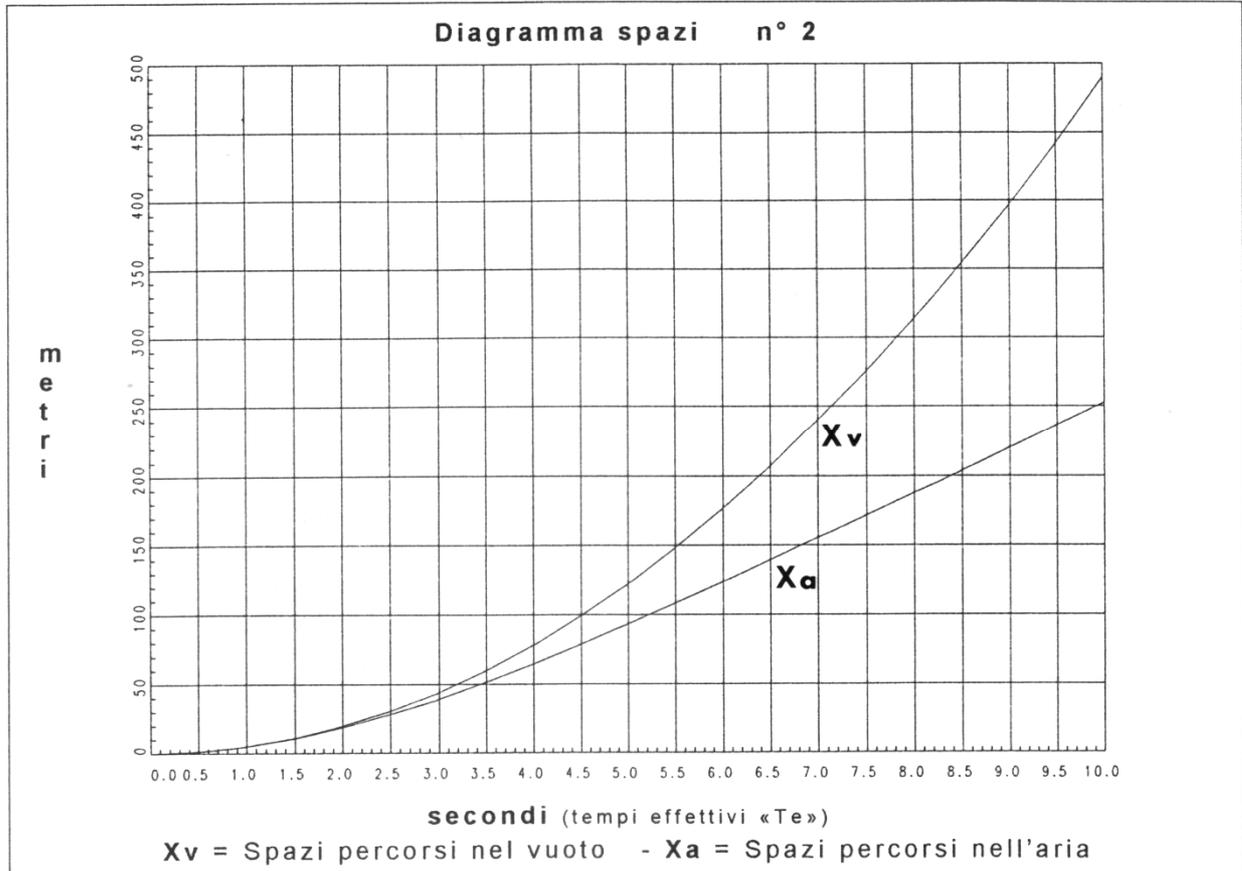
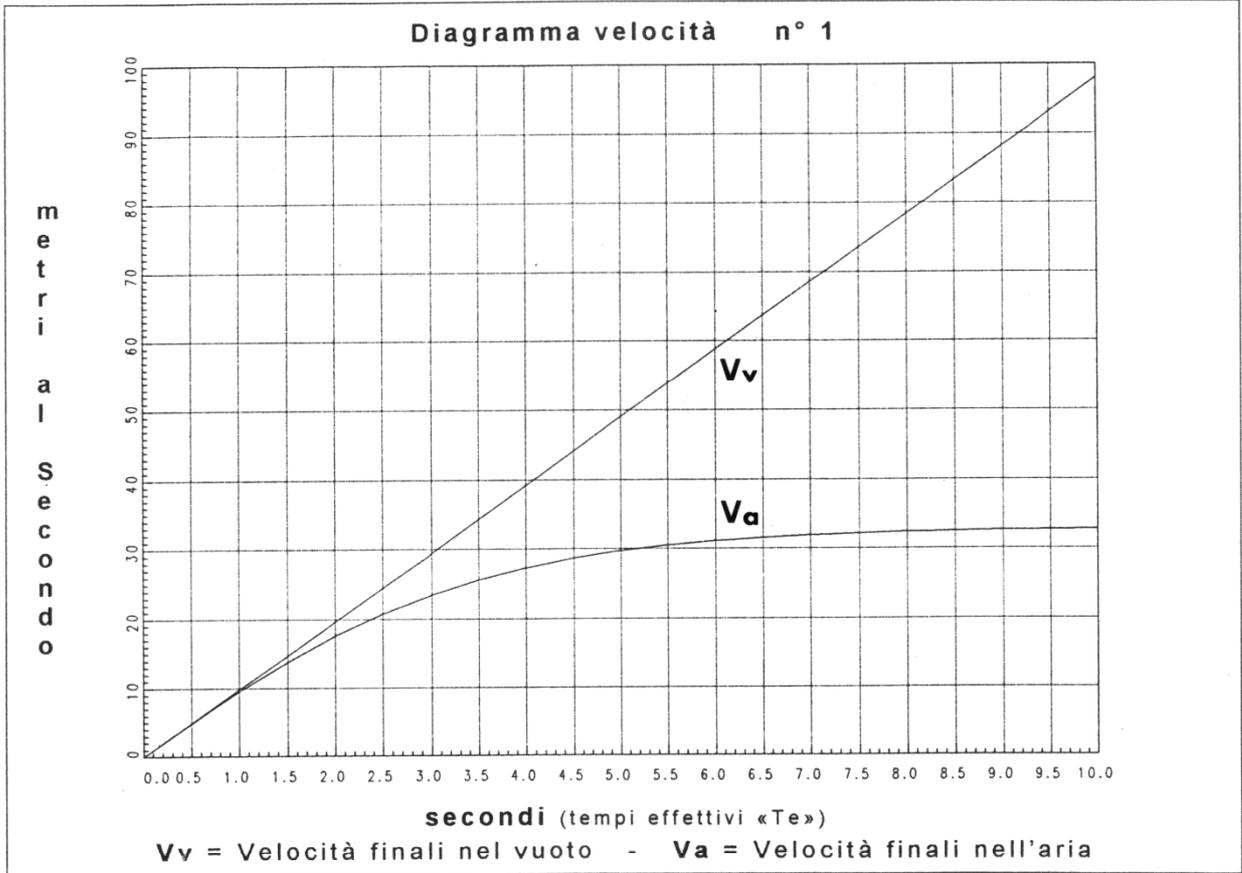
La riga n° 1 contiene il valore delle *costanti* utilizzate dall'Autore; il valore di «G» e quello di «Vs» (eventualmente anche quello di «Vc») possono essere modificati per adattarli alle diverse condizioni reali.



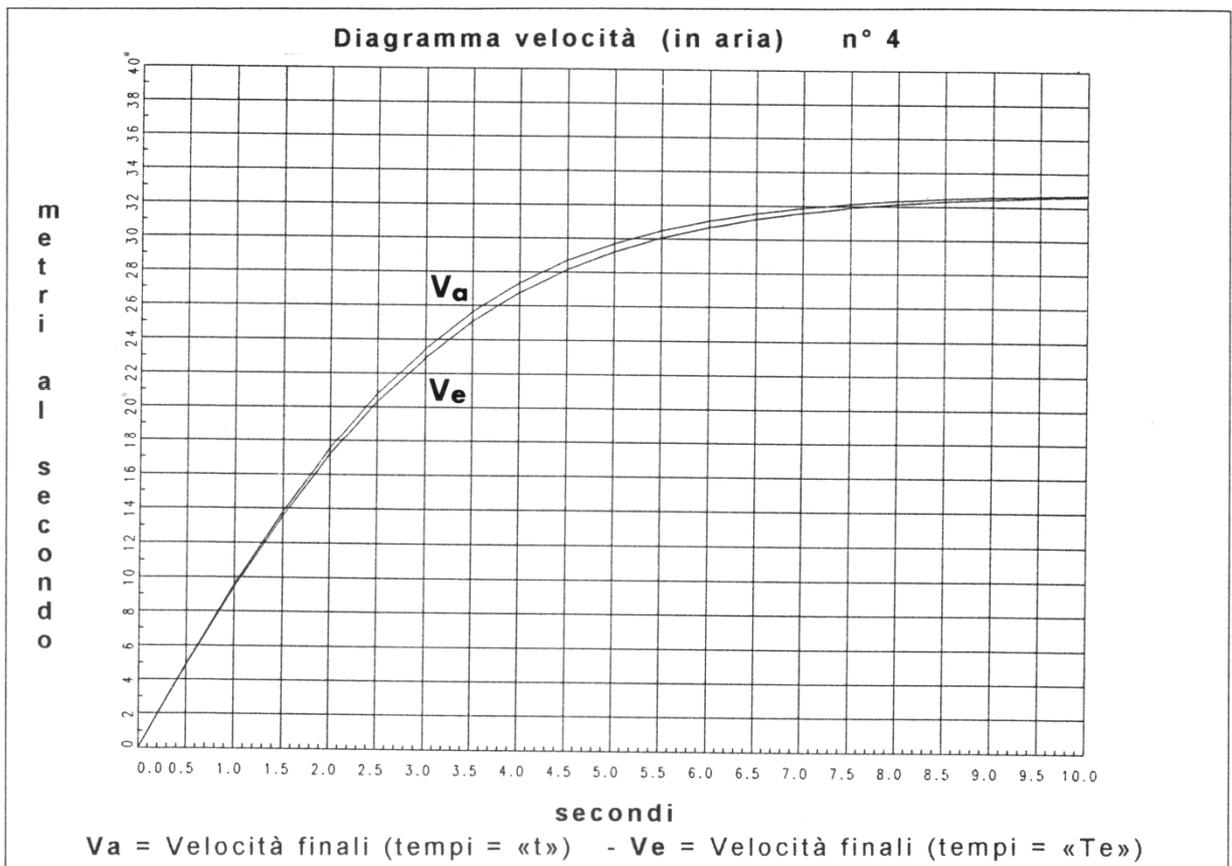
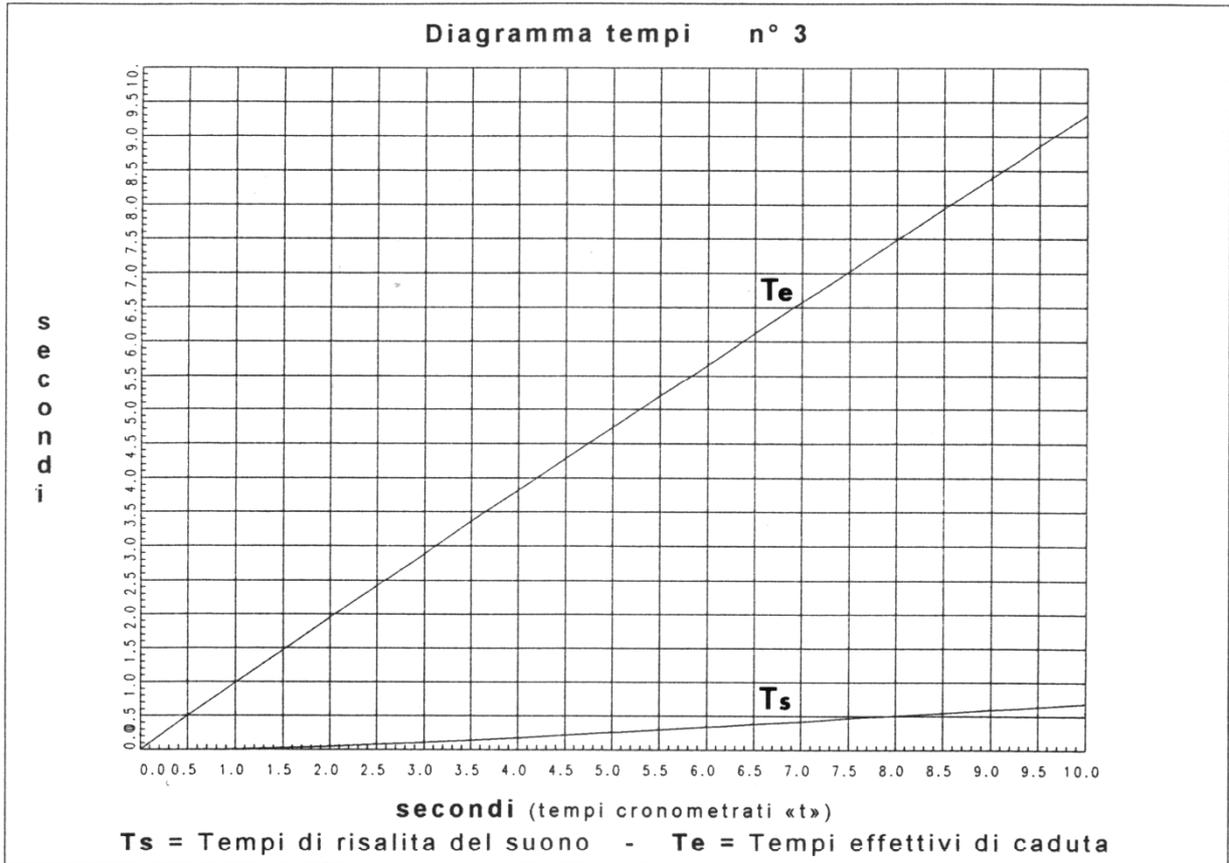
# *Diagrammi*



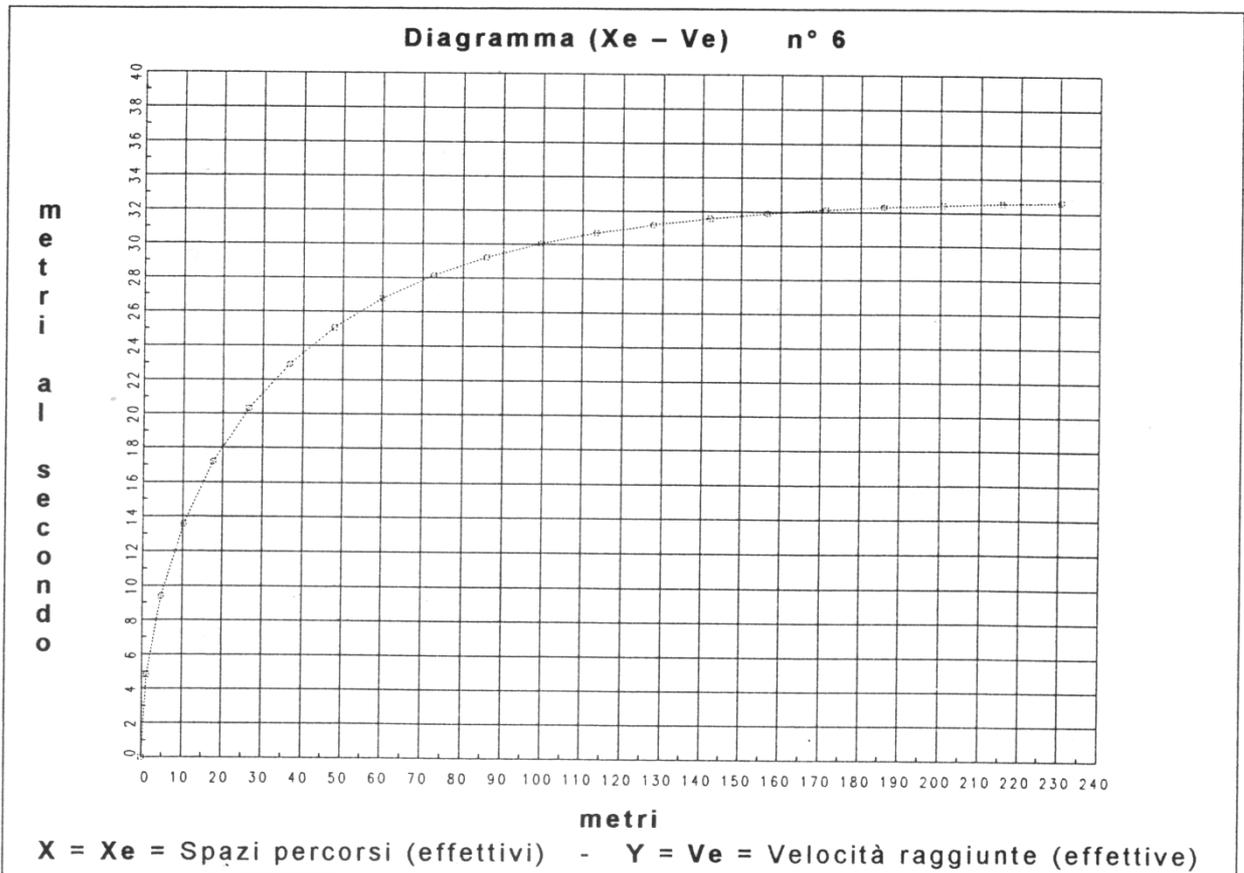
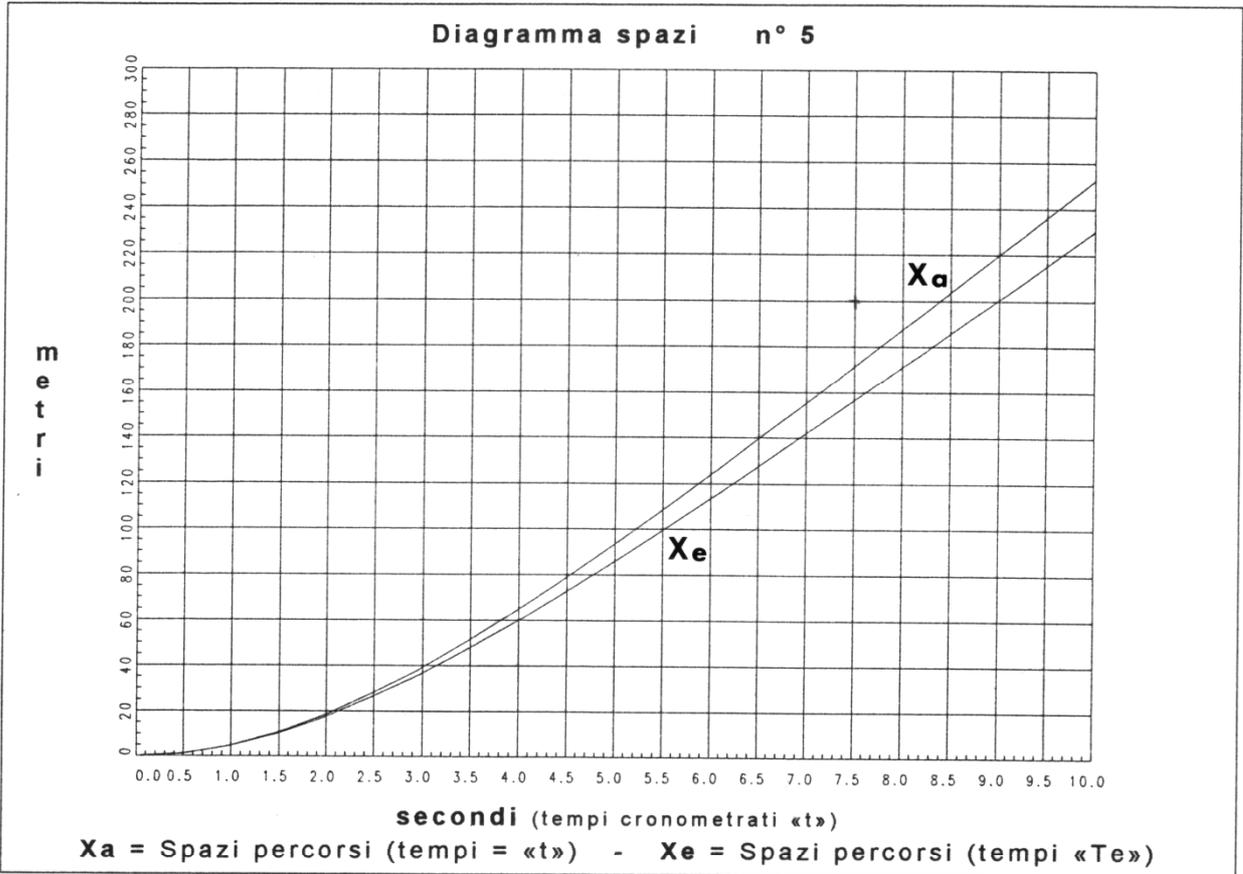
# Diagrammi



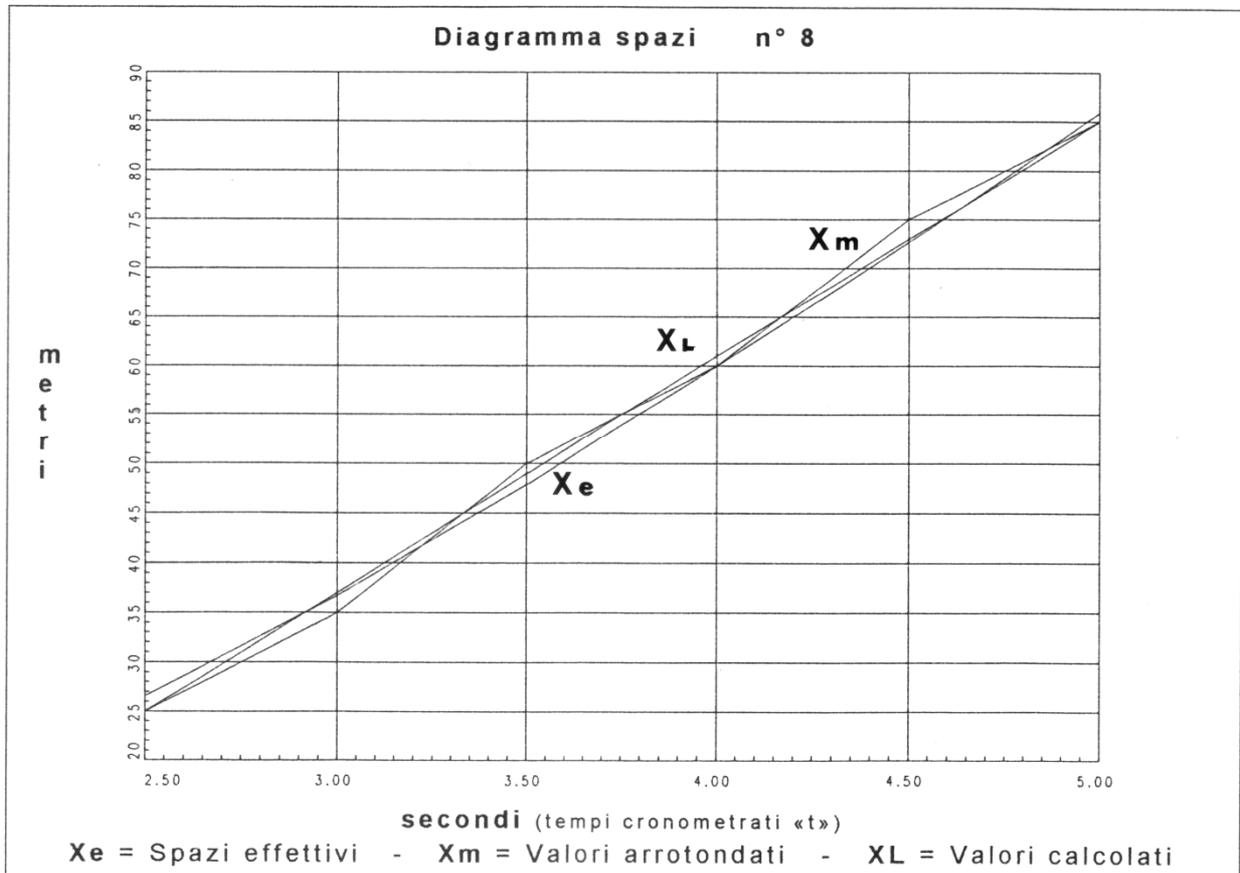
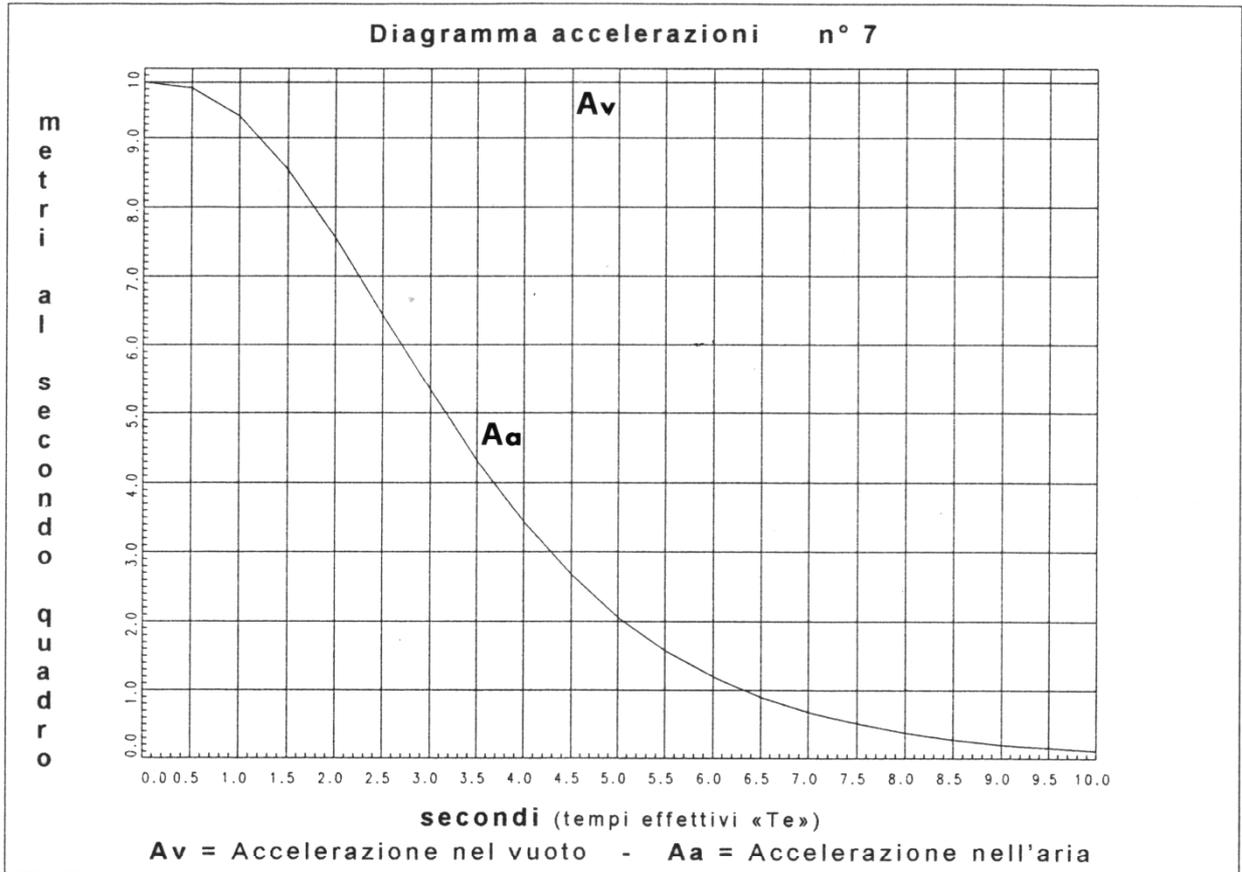
## Diagrammi



# Diagrammi



## Diagrammi



## Indice analitico

Paragrafi	pagina
<b>Prefazione</b> . . . . .	<b>02</b>
<i>Un antico metodo per la stima della profondità Il «Pietrometro»</i>	
<b>Premessa</b> . . . . .	<b>03</b>
<b>Abstract</b> . . . . .	<b>03</b>
<b>La teoria</b> . . . . .	<b>03</b>
<b>I risultati</b> . . . . .	<b>06</b>
<b>Una precisazione doverosa</b> . . . . .	<b>09</b>
<b>Listato del programma «FONDIZZO.BAS»</b> . . . . .	<b>11</b>
<i>Diagrammi:</i>	
n° 1, n° 2 . . . . .	<b>15</b>
n° 3, n° 4 . . . . .	<b>16</b>
n° 5, n° 6 . . . . .	<b>17</b>
n° 7, n° 8 . . . . .	<b>18</b>
<b>Indice analitico</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>19</b>

## Bibliografia

- [R. 1] AA. VV. - V. Prelovsek - (1978)  
Manuale di speleologia  
Ed. Longanesi & C.
- [R. 2] Marbach G. - J. L. Rocourt (1980)  
Techniques de la Speleologie Alpine  
Ed. Techniques Sportives Appliquees (Choranche)
- [R. 3] Melegari E. G. (1984)  
Speleologia Scientifica e Esplorativa  
Ed. Calderini
- [R. 4] Rossi - Osmida G. (1974)  
Le caverne e l'uomo  
Ed. Longanesi & C.